Часть II. Подробный вывод некоторых результатов.

§ 1 Обозначения и формулы, используемые в приложении.

Содержание этого параграфа включает в себя материал из книги [1] и материал из справочников по математике.

I. Обозначения .

Трехмерные величины

Трехмерные тензорные индексы обозначаются греческими буквами: α,β,γ .

Элементы объема, площади и длины $dV, d\bar{s}, d\bar{l}$.

Плотности зарядов и токов, соответствующих полю $\bar{L}$

$\rho_L, \quad \bar{j}_L$.

Совершенно антисимметричный единичный псевдотензор 3-го ранга $e_{\alpha\beta\gamma}$. $e_{123} = 1$. Отличны от нуля лишь компоненты с тремя различными индексами. Знак меняется при перестановке любых двух индексов. Остальные компоненты равны +1 или -1, в зависимости от того четным или нечетным числом можно перевести последовательность α, β, γ к последовательности 123.

Если $\bar{C} = \left[\bar{A} \times \bar{B}\right]$, *то* $C_\alpha = \frac{1}{2} \cdot e_{\alpha\beta\gamma} \cdot \left(A_\beta \cdot B_\gamma - A_\gamma \cdot B_\beta\right)$.

Скалярное произведение векторов $\bar{A} \cdot \bar{B}$.

Векторное произведение $\bar{A} \times \bar{B}$ или $\left[\bar{A} \times \bar{B}\right]$.

Четырехмерные величины:

Четырехмерные тензорные индексы обозначаются латинскими буквами i , j , k , l и пробегают значения 0, 1, 2, 3 .

Контравариантные компоненты 4-векторов

A^0, A^1, A^2, A^3 *записываются в виде* $A^i = \left(A^0, \bar{A}\right)$.

Ковариантные компоненты 4-векторов

$$A_0, A_1, A_2, A_3 \text{ записываются в виде } A_i = \left(A^0, -\overline{A}\right) .$$

A^{ik} , A_{ik} , $A^i{}_k$ – контравариантные, ковариантные, смешанные компоненты 4-тензора второго ранга. Связь между различными видами компонент подчиняется правилу: поднятие или опускание временного индекса (0) не меняет, а поднятие или опускание пространственного индекса (1,2,3) меняет знак компоненты.

Например, $A^{01} = -A_{01}$, $A^{11} = A_{11}$, $A^{00} = A_{00}$, … .

Совершенно антисимметричный единичный 4-тензор 4-го ранга e^{iklm}. $e^{0123} = 1$. Компоненты этого тензора меняют знак при перестановке любых двух индексов. Отличные от нуля компоненты равны +1 или -1 , смотря по тому четным или нечетным числом перестановок могут быть приведены числа i , k , l , m к последовательности $0 , 1 , 2 , 3$. Все компоненты этого тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают равны нулю.

Компоненты антисимметричного 4-тензора можно представить в виде таблицы

$$A^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} = \left(\overline{p}, \overline{a}\right),$$

$\overline{p}$ – *полярный вектор*, $\overline{a}$ – *аксиальный вектор*.

Если A^{ik} – антисимметричный тензор , то тензор A^{ik} и псевдотензор $A^{*ik} = \frac{1}{2} \cdot e^{iklm} \cdot A_{lm}$.

называются дуальными друг к другу.

Правило получения псевдотензора

$$A^{*01} = A_{23}\ ,\ A^{*02} = A_{31}\ ,\ A^{*03} = A_{12}\ ,\ A^{*23} = A_{01}\ ,$$

$$A^{*31} = A_{02}\ ,\ A^{*12} = A_{03}\ .$$

Элемент 4-обьема $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$.

Элемент гиперповерхности dS^i .

Символические величины единой теории векторных полей:

Индексы заглавных латинских букв Y,X,L,N,…принимают значения из набора $X_1, X_2,\ \ldots\ , X_n$ векторных полей.

4-вектор тока $j_L^{\ i} = \left(c \cdot \rho_L, \overline{j}_L\right)$.

4-потенциал поля $\overline{L}$: $A_L^{\ i} = \left(A_L^{\ 0}, c \cdot \overline{A}_L\right)$.

Скалярный и векторный потенциал поля $\overline{L}$: φ_L , $\overline{A}_L$.

II. Определения и формулы.

$$\overline{\nabla} = \overline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial}{\partial z}\ .$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\ .$$

$$grad\,\varphi = \overline{\nabla} \cdot \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\overline{k}\ .$$

$$div\overline{A} = \overline{\nabla} \cdot \overline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\ .$$

$$rot\,\overline{A} = \overline{\nabla} \times \overline{A} = \overline{i} \cdot rot_x \overline{A} + \overline{j} \cdot rot_y \overline{A} + \overline{k} \cdot rot_z \overline{A} =$$

$$= \overline{i} \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \overline{j} \cdot \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \overline{k} \cdot \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\ .$$

$$grad\left(\overline{A} \cdot \overline{B}\right) = \left(\overline{A} \cdot \overline{\nabla}\right) \cdot \overline{B} + \left(\overline{B} \cdot \overline{\nabla}\right) \cdot \overline{A} + \left[\overline{B} \times rot\,\overline{A}\right] + \left[\overline{A} \times rot\,\overline{B}\right]\ .$$

$$div\left[\overline{A}\times\overline{B}\right]=\overline{B}\cdot rot\,\overline{A}-\overline{A}\cdot rot\,\overline{B}\quad .$$

$$rot\;\left[\overline{A}\times\overline{B}\right]=\left(\overline{B}\cdot\overline{\nabla}\right)\overline{A}-\left(\overline{A}\cdot\overline{\nabla}\right)\overline{B}+\overline{A}\left(\overline{\nabla}\cdot\overline{B}\right)-\overline{B}\left(\overline{\nabla}\cdot\overline{A}\right)=$$

$$=\left(\overline{B}\cdot\overline{\nabla}\right)\overline{A}-\left(\overline{A}\cdot\overline{\nabla}\right)\overline{B}+\overline{A}\cdot div\overline{B}-\overline{B}\cdot div\,\overline{A}\quad .$$

$$grad\,\frac{1}{r}=-\frac{\overline{r}}{r^3}\quad .$$

$$grad\,\frac{1}{r^3}=-\frac{3\cdot\overline{r}}{r^5}\quad .$$

$$rot\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right)=2\cdot\overline{\omega}\quad .$$

$$rot\,\frac{\overline{\omega}\times\overline{r}}{r^3}=\frac{2\cdot\overline{\omega}}{r^3}-\frac{3\cdot\overline{r}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right)}{r^5}\quad .$$

Теорема Остроградского-Гаусса

$$\oiint\limits_S\overline{A}\cdot d\overline{S}=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_Y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\cdot dV=\iiint\limits_V div\overline{A}\cdot dV$$

Поток векторного поля через замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции по объему, ограниченному этой поверхностью.

Обобщение теоремы Гаусса для четырехмерных интегралов:

Интеграл по замкнутой гиперповерхности преобразуется в интеграл по заключенному в ней 4-объему путем замены элемента интегрирования

dS_i на оператор : $\quad dS_i \quad \rightarrow \quad d\Omega\dfrac{\partial}{\partial x^i}$,

например:

$$\oint A^i dS_i=\int\frac{\partial A^i}{\partial x^i}d\Omega \quad \text{где} \quad dS^i=-\frac{1}{6}\cdot e^{iklm}\cdot dS_{klm}\ ,$$

$$dS^{ikl}=\begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^l & dx'^l & dx''^l \end{vmatrix}$$ - площадь гипер-

поверхности(объем параллелепипеда, построенного на трех 4-векторах. Геометрически dS^i 4-вектор, по величине равный “площади” гиперповерхности и по направлению нормальный к этому элементу.

При этом $dS^0 = dS^{123}$, $dS^1 = dS^{023}$, …

$$d\Omega = dx^0 \cdot dx^1 \cdot dx^2 \cdot dx^3 = c \cdot dt \cdot dx \cdot dy \cdot dz = c \cdot dt \cdot dV$$

элемент интегрирования при интегрировании по 4-объему.

Теорема о градиенте

$$\int_V \nabla \cdot \Phi(\bar{r}) dV = \int_S d\bar{S} \cdot \Phi(\bar{r}) \text{ или } \int_V grad\, \Phi(\bar{r}) dV = \int_S \Phi(\bar{r}) \cdot d\bar{S} \ .$$

Матрицы

Матрица (a) размера $m \times n$ с элементами a_{ik} .

Транспонированная матрица $(a)^T$ размера $n \times m$ с элементами $a^T{}_{ik} = a_{ki}$.

$$((a) \cdot (b))^T = (b)^T \cdot (a)^T \quad , \quad \left((a)^{-1}\right)^T = \left((a)^T\right)^{-1} \ .$$

Квадратная матрица называется симметрической, если $(a)^T = (a)$, т.е. $a_{ik} = a_{ki}$.

Если (a) симметрическая матрица , то

$(a)^p$ $(p = 0,1,2,\ldots)$, $(a)^{-1}$, $\alpha \cdot (a)$

тоже симметрические матрицы.

Действие для системы полей и частиц.

Действие S для всей системы, состоящей из полей вместе с находящимися в нем частицами, должно состоять из трех частей:

$$S = S_f + S_m + S_{mf} \ .$$

S_m есть та часть действия, которая зависит только от свойств частиц, т.е действие для свободных частиц. Действие для одной свободной частицы определяется так :

$$S = -mc \cdot \int_a^b ds \, ,$$

где интервал берется вдоль мировой линии между двумя заданными событиями a и b – нахождением частицы в начальном и конечном местах в определенные моменты времени t_1 и t_2, то есть между заданными мировыми точками.

$ds^2 = dx_0{}^2 - dx_1{}^2 - dx_2{}^2 - dx_3{}^2$ это интервал между событиями. Действие нескольких частиц равно сумме действий для каждой частицы в отдельности:

$$S = -\sum mc \cdot \int ds \quad .$$

S_{mf} есть та часть действия, которая обусловлена взаимодействием между частицами и полем.

S_f есть та часть действия, которая зависит только от свойств самого поля т.е. действие для полей в отсутствии зарядов.

§2 Уравнения единого векторного поля.

Пусть имеется n векторных полей:

$$\overline{X}_1, \ \overline{X}_2, \ \cdots\cdots, \overline{X}_n$$

каждому из которых сопоставляется свой заряд:

$$q_{X_1}, q_{X_2}, \ldots\ldots, q_{X_n} \quad .$$

Предлагается рассматривать эти поля, как проявления одного единого поля. Используя обозначения символических векторов:

$$\left\{\overleftarrow{Y}\right\} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \cdots \\ \overline{X}_n \end{pmatrix} \quad ; \quad \{\rho\} = \begin{pmatrix} \rho_{X_1} \\ \cdots \\ \rho_{X_n} \end{pmatrix} \quad ; \quad \left\{\overleftarrow{j}\right\} = \begin{pmatrix} \overline{j}_{X_1} \\ \cdots \\ \overline{j}_{X_n} \end{pmatrix} \quad ,$$

уравнения единого векторного поля запишутся в виде :

$$div\left\{\overleftarrow{Y}\right\} = (\nu) \cdot \{\rho\}$$

$$rot\left\{\overleftarrow{Y}\right\} = (\mu) \cdot \left\{\overleftarrow{j}\right\} + (\lambda) \cdot \left\{\frac{\partial \overline{L}}{\partial t}\right\} \quad .$$

или в виде:

$$div\overline{Y} = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L$$

$$rot\,\overline{Y} = \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{L}}{\partial t} \qquad ,$$

где Y , L принимают значения из набора символов

$$X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_n \quad ,$$

(ν) - матрица “электрических” постоянных,

(?) - матрица “магнитных” постоянных,

(λ) - матрица “электродинамических” постоянных,

ρ - плотности зарядов,

$\overline{j}$ - плотности токов.

В интегральной форме эти уравнения запишутся в виде:

1. $$\oint \overline{Y} dS = \int \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L dV \quad .$$

Поток поля $\overline{\text{Y}}$ через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся в объеме, ограниченной этой поверхностью.

2. $$\oint \overline{Y} d\overline{l} = \int \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{L}}{\partial t} \cdot d\overline{S} + \int \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L \cdot d\overline{S} =$$

$$= -\int \sum_L \frac{\partial \left(-\overline{\Phi}_Y\right)}{\partial t} \cdot d\overline{S} + \int \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L \cdot d\overline{S} \quad .$$

Циркуляция поля $\overline{\text{Y}}$ по некоторому контуру равна сумме, взятой с обратным знаком производной по времени от потока соответствующего магнитного поля через поверхность, ограниченную этим контуром, и тока соответствующего заряда, протекающего сквозь поверхность, ограничиваемую этим контуром.

§ 3 Релятивистская инвариантность уравнений поля.

Уравнения единого поля

$$div\overline{Y} = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L$$

$$rot\,\overline{Y} = \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{L}}{\partial t} \quad .$$

Введем обозначение: $\overline{\Phi}_Y = \sum_L \lambda_{YL} \cdot \overline{L}$.

Формулы преобразования напряженностей полей при переходе от одной ИСО к другой:

$$Y'_x = Y_x \quad Y'_y = \frac{Y_y + \mathrm{v} \cdot \Phi_{Yz}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \quad Y'_z = \frac{Y_z - \mathrm{v} \cdot \Phi_{Yy}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$$

$$\Phi'_{Yx} = \Phi_{Yx} \qquad \Phi'_{Yy} = \frac{\Phi_{Yy} - \frac{\mathrm{v}}{c^2} \cdot Y_z}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \quad \Phi'_{Yz} = \frac{\Phi_{Yz} + \frac{\mathrm{v}}{c^2} \cdot Y_y}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \quad .$$

Преобразования Лоренца:

$$x' = \frac{x - \mathrm{v} \cdot t}{\beta} \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = \frac{t - \frac{\mathrm{v}}{c^2} \cdot x}{\beta}$$

$$x = \frac{x' + \mathrm{v} \cdot t'}{\beta} \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \frac{t' + \frac{\mathrm{v}}{c^2} \cdot x'}{\beta} \quad ,$$

где $\beta = \sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}$.

Рассмотрим функцию $\psi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t})$. В другой ИСО эта же функция $\psi(\mathrm{x}', \mathrm{y}', \mathrm{z}', \mathrm{t}')$.

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial\psi}{\partial x'}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{\partial\psi}{\partial y'}\cdot 0+\frac{\partial\psi}{\partial z'}\cdot 0-\frac{\partial\psi}{\partial t'}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\mathrm{v}}{c^2}=$$

$$=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x'}-\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\mathrm{v}}{c^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t'}=\frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial x'}-\frac{\mathrm{v}}{c^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t'}\right)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{\partial\psi}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial z}=\frac{\partial\psi}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t}=$$

$$=-\frac{\partial\psi}{\partial x'}\cdot\frac{\mathrm{v}}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t'}=\frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial t'}-\mathrm{v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x'}\right)\quad .$$

Таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x'}-\frac{\mathrm{v}}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t'}-\mathrm{v}\cdot\frac{\partial}{\partial x'}\right)\quad ,$$

или обратно

$$\frac{\partial}{\partial x'}=\frac{1}{\beta}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\mathrm{v}}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}=\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{1}{\beta} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathrm{v} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad .$$

а) Проверка инвариантности уравнения

$$div' \overline{Y'} = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho'_L \quad .$$

$$\frac{\partial Y'_x}{\partial x'} + \frac{\partial Y'_y}{\partial y'} + \frac{\partial Y'_z}{\partial z'} = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho'_L$$

$$\frac{1}{\beta} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\mathrm{v}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) Y'_x + \frac{\partial}{\partial y} Y'_y + \frac{\partial}{\partial z} Y'_z = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho'_L$$

$$\frac{1}{\beta} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\mathrm{v}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) Y_x + \frac{\partial}{\partial y} \frac{Y_y + \mathrm{v} \cdot \Phi_{Yz}}{\beta} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{Y_z - \mathrm{v} \cdot \Phi_{Yy}}{\beta} =$$

$$= \sum_L \nu_{YL} \cdot \frac{\rho_L - \frac{\mathrm{v}}{c^2} \cdot j_{Lx}}{\beta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} Y_x + \frac{\mathrm{v}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} Y_x + \frac{\partial}{\partial y} Y_y + \mathrm{v} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Phi_{Yz} + \frac{\partial}{\partial z} Y_z - \mathrm{v} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{Yy} =$$

$$= \sum_L \nu_{YL} \cdot \left(\rho_L - \frac{\mathrm{v}}{c^2} \cdot j_{Lx} \right)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} Y_x + \frac{\partial}{\partial y} Y_y + \frac{\partial}{\partial z} Y_z \right) + \frac{\mathrm{v}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} Y_x + \mathrm{v} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \Phi_{Yz} - \frac{\partial}{\partial z} \Phi_{Yy} \right) =$$

$$= \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L - \sum_L \frac{\mathrm{v}}{c^2} \cdot j_{Lx}$$

$$div \overline{Y} + \frac{\mathrm{v}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} Y_x + \mathrm{v} \cdot rot \overline{\Phi}_x = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L - \sum_L \frac{\mathrm{v}}{c^2} \cdot j_{Lx}$$

$$div\overline{Y} + \left(\frac{\mathrm{v}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} Y_x + \mathrm{v} \cdot rot\overline{\Phi}_x + \sum_L \frac{\mathrm{v}}{c^2} \cdot j_{Lx} \right) = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L$$

$$div\overline{Y} + 0 = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L \quad ; \quad div\overline{Y} = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L \ .$$

Таким образом, при преобразовании координат

$$x = \frac{x' + \mathrm{v} \cdot t'}{\beta} \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \frac{t' + \dfrac{\mathrm{v}}{c^2} \cdot x'}{\beta} \quad ,$$

$$где \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}} \ ,$$

от уравнения $div\overline{Y'} = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho'_L$ пришли к уравнению

$$div\overline{Y} = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L \ .$$

То есть доказали инвариантность этих уравнений.

б) Проверка инвариантности уравнения

$$rot'\overline{Y'} = \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j'}_L + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{L'}}{\partial t'} \ .$$

Инвариантность покажем на примере уравнения

$$rot_{x'}\overline{Y'} = \sum_L \mu_{YL} \cdot j'_{Lx} + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial L'_x}{\partial t'} \ .$$

$$\frac{\partial Y'_z}{\partial y'} - \frac{\partial Y'_y}{\partial z'} = \sum_L \mu_{YL} \cdot j'_{Lx} + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial L'_x}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial Y'_z}{\partial y} - \frac{\partial Y'_y}{\partial z} = \sum_L \mu_{YL} \cdot \frac{j_{Lx} - \mathrm{v} \cdot \rho_L}{\beta} + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathrm{v} \cdot \partial}{\partial x} \right) L'_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Y_z - \mathrm{v} \cdot \Phi_{Yy}}{\beta} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Y_y + \mathrm{v} \cdot \Phi_{Yz}}{\beta} \right) = \sum_L \mu_{YL} \cdot \frac{j_{Lx} - \mathrm{v} \cdot \rho_L}{\beta} +$$

$$+ \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathrm{v} \cdot \partial}{\partial x} \right) L_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(Y_z - \mathrm{v}\cdot\Phi_{Yy}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(Y_y + \mathrm{v}\cdot\Phi_{Yz}\right) = \sum_L \mu_{YL}\cdot\left(j_{Lx} - \mathrm{v}\cdot\rho_L\right) +$$

$$+ \sum_L \lambda_{YL}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathrm{v}\cdot\partial}{\partial x}\right)L_x$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}Y_z - \frac{\partial}{\partial z}Y_y\right) - \mathrm{v}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial z}\Phi_{Yz} + \frac{\partial}{\partial y}\Phi_{Yy} + \frac{\partial}{\partial x}\sum_L \lambda_{YL}\cdot L_x\right) =$$

$$= \sum_L \mu_{YL}\cdot j_{Lx} - \mathrm{v}\cdot\sum_L \mu_{YL}\cdot\rho_L + \sum_L \lambda_{YL}\cdot\frac{\partial L_x}{\partial t}$$

$$rot_x\overline{Y} - \mathrm{v}\cdot div\overline{\Phi}_Y = \sum_L \mu_{YL}\cdot j_{Lx} - \mathrm{v}\cdot\sum_L \mu_{YL}\cdot\rho_L + \sum_L \lambda_{YL}\cdot\frac{\partial L_x}{\partial t}$$

$$rot_x\overline{Y} = \sum_L \mu_{YL}\cdot j_{Lx} + \sum_L \lambda_{YL}\cdot\frac{\partial L_x}{\partial t} + \left(\mathrm{v}\cdot div\overline{\Phi}_Y - \mathrm{v}\cdot\sum_L \mu_{YL}\cdot\rho_L\right)$$

$$rot_x\overline{Y} = \sum_L \mu_{YL}\cdot j_{Lx} + \sum_L \lambda_{YL}\cdot\frac{\partial L_x}{\partial t} + 0$$

$$rot_x\overline{Y} = \sum_L \mu_{YL}\cdot j_{Lx} + \sum_L \lambda_{YL}\cdot\frac{\partial L_x}{\partial t} \quad .$$

От уравнения

$$rot_{x'}\overline{Y'} = \sum_L \mu_{YL}\cdot j'_{Lx} + \sum_L \lambda_{YL}\cdot\frac{\partial L'_x}{\partial t'}$$

пришли к уравнению $rot_x\overline{Y} = \sum_L \mu_{YL}\cdot j_{Lx} + \sum_L \lambda_{YL}\cdot\frac{\partial L_x}{\partial t}$.

То есть доказали инвариантность этих уравнений.
Аналогично докажем инвариантность уравнений

$$rot_{y'}\overline{Y'} = \sum_L \mu_{YL}\cdot j'_{Ly} + \sum_L \lambda_{YL}\cdot\frac{\partial L'_y}{\partial t'} \qquad \text{и}$$

$$\mathrm{rot}_y\overline{\mathrm{Y}} = \sum_{\mathrm{L}} \mu_{\mathrm{YL}}\cdot \mathrm{j}_{\mathrm{Ly}} + \sum_{\mathrm{L}} \lambda_{\mathrm{YL}}\cdot\frac{\partial \mathrm{L}_y}{\partial \mathrm{t}} \quad .$$

$$rot_{z'}\overline{Y'} = \sum_L \mu_{YL} \cdot j'_{Lz} + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial L'_z}{\partial t'} \qquad \text{и}$$

$$rot_z \overline{Y} = \sum_L \mu_{YL} \cdot j_{Lz} + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial L_z}{\partial t} \quad .$$

в) Проведем следующие рассуждения

$$\Phi'_{Yz} = \frac{\Phi_{Yz} + \frac{\mathrm{v}}{c^2} \cdot Y_y}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \qquad =>$$

$$\sum_L \lambda_{YL} \cdot L'_z = \frac{\Phi_{Yz} + \frac{\mathrm{v}}{c^2} \cdot Y_y}{\beta} \qquad =>$$

$$\sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{L_z - \mathrm{v} \cdot \Phi_{Ly}}{\beta} = \frac{\Phi_{Yz} + \frac{\mathrm{v}}{c^2} \cdot Y_y}{\beta} \qquad =>$$

$$\Phi_{Yz} - \mathrm{v} \cdot \sum_L \lambda_{YL} \Phi_{Ly} = \Phi_{Yz} + \frac{\mathrm{v}}{c^2} \cdot Y_y \qquad =>$$

$$-\sum_L \lambda_{YL} \Phi_{Ly} = \frac{1}{c^2} \cdot Y_y \qquad =>$$

$$-\sum_L \lambda_{YL} \cdot \sum_N \lambda_{LN} \cdot N_y = \frac{1}{c^2} \cdot Y_y \qquad =>$$

$$\sum_N \sum_L \lambda_{YL} \cdot \lambda_{LN} \cdot N_y = -\frac{1}{c^2} \cdot Y_y \qquad =>$$

$$\sum_L \lambda_{YL} \cdot \lambda_{LN} = \begin{cases} -1/c^2 & , N = Y \\ 0 \quad , & N \neq Y \end{cases} \quad .$$

Таким образом,

$$(\lambda) \cdot (\lambda) = \frac{-1}{c^2} \cdot (I) \quad , \quad (I) - \textit{единичная матрица} \quad .$$

§4 Закон сохранения зарядов .

Уравнения поля $$div\overline{Y} = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L$$

$$rot\overline{Y} = \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{L}}{\partial t} \quad .$$

Проведем следующие рассуждения

$$rot\overline{Y} = \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{L}}{\partial t}$$

$$div\ rot\overline{Y} = div\sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L + div\sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{L}}{\partial t}$$

$$0 = \sum_L \mu_{YL} \cdot div\overline{j}_L + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial t} div\overline{L}$$

$$\sum_L \mu_{YL} \cdot div\overline{j}_L + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sum_N \nu_{LN} \cdot \rho_N = 0$$

$$\sum_L \mu_{YL} \cdot div\overline{j}_L + \sum_L \sum_N \lambda_{YL} \cdot \nu_{LN} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \rho_N = 0$$

$$\sum_L \mu_{YL} \cdot div\overline{j}_L + \sum_L \sum_N \lambda_{YN} \cdot \nu_{NL} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \rho_L = 0 \quad .$$

Если положить $\sum_N \lambda_{YN} \cdot \nu_{NL} = \mu_{YL}$, то

$$\sum_L \mu_{YL} \cdot div\overline{j}_L + \sum_L \mu_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \rho_L = 0$$

$$\sum_L \mu_{YL} \cdot \left(div\overline{j}_L + \frac{\partial \rho_L}{\partial t} \right) = 0$$

$$div\ \overline{j}_L + \frac{\partial \rho_L}{\partial t} = 0 \quad .$$

Последнее уравнение представляет собой закон сохранения зарядов каждого вида.

Вывод : Разумно предположить, что будет выполняться закон сохранения зарядов каждого вида

$$div\,\overline{j}_L + \frac{\partial \rho_L}{\partial t} = 0 \quad .$$

Это справедливо при выполнения условия :

$$(\lambda) = (\mu)\cdot(\nu)^{-1} \quad .$$

§ 5 Закон сохранения энергии поля. Поперечность волн единого поля.

Уравнения поля

$$div\overline{Y} = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L$$

$$rot\,\overline{Y} = \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{L}}{\partial t} \quad .$$

Для пустого пространства :

$$rot\,\overline{Y} = \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{L}}{\partial t} \qquad \text{или} \qquad rot\,\overline{Y} = \frac{\partial \overline{\Phi}_Y}{\partial t} \quad ,$$

где $\overline{\Phi}_Y = \sum_L \lambda_{YL} \cdot \overline{L}$.

$$rot\,\overline{\Phi}_Y = \sum_L \lambda_{YL} \cdot rot\,\overline{L} = \sum_L \lambda_{YL} \cdot \sum_N \lambda_{LN} \cdot \frac{\partial \overline{N}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \overline{Y}}{\partial t}$$

$$rot\,\overline{\Phi}_Y = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \overline{Y}}{\partial t} \quad .$$

Проведем рассуждения

$rot\,\overline{Y} = \dfrac{\partial \overline{\Phi}_Y}{\partial t}$ умножим слева обе части уравнения на $\overline{\Phi}_Y$

$rot\,\overline{\Phi}_Y = -\dfrac{1}{c^2} \cdot \dfrac{\partial \overline{Y}}{\partial t}$ умножим слева обе части уравнения на $\overline{Y}$.

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\overline{\Phi}_Y \cdot rot\,\overline{Y} - \overline{Y} \cdot rot\,\overline{\Phi}_Y = \overline{\Phi}_Y \cdot \frac{\partial \overline{\Phi}_Y}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \cdot \overline{Y} \cdot \frac{\partial \overline{Y}}{\partial t} \quad .$$

Получим: $$div\left[\overline{Y} \times \overline{\Phi}_Y\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Phi^2{}_Y + \frac{1}{c^2} \cdot Y^2}{2}\right)$$

$$div\left[\overline{Y} \times \left(-\overline{\Phi}_Y\right)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Phi^2{}_Y + \frac{1}{c^2} \cdot Y^2}{2}\right) = 0 \ .$$

Обозначим:

$\overline{S}_Y = \left[\overline{Y} \times \left(-\overline{\Phi}_Y\right)\right]$ $\quad$ *– вектор Пойтинга поля* $\overline{Y}$

$\omega_Y = \left(\dfrac{\Phi_Y{}^2 + \frac{1}{c^2} \cdot Y^2}{2}\right)$ $\quad$ *– плотность энергии поля* $\overline{Y}$.

Тогда

$\overline{S}_Y + \dfrac{\partial \omega_Y}{\partial t} = 0$ $\quad$ *– закон сохранения энергии поля* $\overline{Y}$.

Закон сохранения энергии поля будет представлять собой совокупность n уравнений:

$$div\,\overline{S}_Y + \frac{\partial \omega_Y}{\partial t} = 0 \quad ,$$

где :

$$\overline{S}_Y = \overline{Y} \times \left(-\overline{\Phi}_Y\right) \quad \textit{вектор Пойтинга поля } \overline{Y}$$

$$\omega_Y = \frac{1}{2}\left(\overline{\Phi}_Y \cdot \overline{\Phi}_Y + \frac{1}{c^2}\overline{Y} \cdot \overline{Y}\right) \quad \textit{плотность энергии поля } \overline{Y}.$$

В качестве примера найдем энергию поля, создаваемого сферой радиуса а

с набором зарядов $\{q_Y\} = \begin{pmatrix} q_{X_1} \\ \cdots \\ q_{X_n} \end{pmatrix}$.

Напряженность поля вне шара :

$$\overline{Y} = \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overline{r}}{r^3}$$

$$\overline{\Phi}_Y = \sum_N \lambda_{YN} \cdot \overline{N} \quad .$$

$$\overline{Y} \cdot \overline{Y} = \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overline{r}}{r^3} \cdot \sum_N \frac{\nu_{YN} \cdot q_N}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overline{r}}{r^3} = \sum_N \sum_L \frac{\nu_{YN} \cdot \nu_{YL} \cdot q_N \cdot q_L}{16 \cdot \pi^2 \cdot r^4}$$

$$\overline{\Phi}_Y \cdot \overline{\Phi}_Y = \sum_N \lambda_{YN} \cdot \overline{N} \cdot \sum_L \lambda_{YL} \cdot \overline{L} = \sum_N \sum_L \lambda_{YN} \cdot \lambda_{YL} \cdot \overline{N} \cdot \overline{L} =$$

$$= \sum_N \sum_L \lambda_{YN} \cdot \lambda_{YL} \cdot \sum_K \frac{\nu_{NK} \cdot q_K}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overline{r}}{r^3} \cdot \sum_M \frac{\nu_{LM} \cdot q_M}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overline{r}}{r^3} =$$

$$= \frac{1}{16 \cdot \pi^2 \cdot r^4} \cdot \sum_N \sum_L \sum_K \sum_M \lambda_{YN} \cdot \lambda_{YL} \cdot \nu_{NK} \cdot \nu_{LM} \cdot q_K \cdot q_M =$$

$$= \frac{1}{16 \cdot \pi^2 \cdot r^4} \cdot \sum_K \sum_M \sum_N \left(\lambda_{YN} \cdot \nu_{NK}\right) \cdot \left(\sum_L \lambda_{YL} \cdot \nu_{LM}\right) \cdot q_K \cdot q_M =$$

$$= \frac{1}{16 \cdot \pi^2 \cdot r^4} \cdot \sum_K \sum_M \mu_{YK} \cdot \mu_{YM} \cdot q_K \cdot q_M \quad .$$

$$\omega_Y = \frac{1}{2}\left(\overline{\Phi}_Y \cdot \overline{\Phi}_Y + \frac{1}{c^2}\overline{Y}\cdot\overline{Y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{16\cdot\pi^2\cdot r^4}\cdot\sum_N\sum_L \mu_{YN}\cdot\mu_{YL}\cdot q_N\cdot q_L +$$

$$+ \frac{1}{c^2}\cdot\sum_N\sum_L \frac{\nu_{YN}\cdot\nu_{YL}\cdot q_N\cdot q_L}{16\cdot\pi^2\cdot r^4}\Big) =$$

$$= \frac{1}{32\cdot\pi^2\cdot r^4}\cdot\sum_N\sum_L\Big(\mu_{YN}\cdot\mu_{YL} + \frac{1}{c^2}\cdot\nu_{YN}\cdot\nu_{YL}\Big)\cdot q_N\cdot q_L \ .$$

$$W_Y = \int_{V_0}^{\infty}\omega_Y\cdot dV = \int_a^{\infty}\omega_Y\cdot 4\pi\cdot r^2 dr =$$

$$= \int_a^{\infty} \frac{4\pi\cdot r^2}{32\cdot\pi^2\cdot r^4}\cdot\sum_L\sum_N\left(\mu_{YL}\cdot\mu_{YN} + \frac{1}{c^2}\cdot\nu_{YL}\cdot\nu_{YN}\right)\cdot q_N\cdot q_L\cdot dr =$$

$$= \frac{1}{8\cdot\pi}\cdot\sum_L\sum_N\left(\mu_{YL}\cdot\mu_{YN} + \frac{1}{c^2}\cdot\nu_{YL}\cdot\nu_{YN}\right)\cdot q_N\cdot q_L\int_a^{\infty}\frac{1}{r^2}\cdot dr =$$

$$= \frac{1}{8\cdot\pi\cdot a}\cdot\sum_L\sum_N\left(\mu_{YL}\cdot\mu_{YN} + \frac{1}{c^2}\cdot\nu_{YL}\cdot\nu_{YN}\right)\cdot q_N\cdot q_L \ .$$

$$W = \sum_Y W_Y = \frac{1}{8\cdot\pi\cdot a}\cdot\sum_Y\left(\sum_L\sum_N\left(\mu_{YL}\cdot\mu_{YN} + \frac{1}{c^2}\cdot\nu_{YL}\cdot\nu_{YN}\right)\cdot q_L\cdot q_N\right)$$

Энергия шара радиуса a :

$$W = \frac{1}{8\cdot\pi\cdot a}\cdot\sum_Y\left(\sum_L\sum_N\left(\mu_{YL}\cdot\mu_{YN} + \frac{1}{c^2}\cdot\nu_{YL}\cdot\nu_{YN}\right)\cdot q_L\cdot q_N\right) \ .$$

§6 Вывод условия существования волн. Поперечность волн единого векторного поля.

Уравнения поля $$div\overline{Y} = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L$$

$$rot\,\overline{Y} = \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{L}}{\partial t} \quad .$$

Уравнения поля для пустого пространства:

$$div\overline{Y} = 0$$

$$rot\,\overline{Y} = \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{L}}{\partial t} \quad .$$

Тогда

$$rot\left(\, rot\,\overline{Y}\,\right) = rot\sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{L}}{\partial t}$$

$$grad\,div\overline{Y} - \nabla^2 \overline{Y} = \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial t} rot\,\overline{L} \, .$$

Для пустого пространства :

$$grad\,div\overline{Y} = 0 \;\; , \quad rot\,\overline{L} = \sum_N \lambda_{LN} \cdot \frac{\partial \overline{N}}{\partial t}$$

$$-\nabla^2 \overline{Y} = \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sum_N \lambda_{LN} \cdot \frac{\partial \overline{N}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \overline{Y} = -\sum_L \lambda_{YL} \cdot \sum_N \lambda_{LN} \cdot \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \overline{Y} = -\sum_N \sum_L \lambda_{YL} \cdot \lambda_{LN} \cdot \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \overline{Y} = -\sum_N \left(\sum_L \lambda_{YL} \cdot \lambda_{LN} \right) \cdot \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial t^2} \quad .$$

Уравнение волны : $\nabla^2 f = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$.

В нашем случае: $\nabla^2 \overline{Y} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{Y}}{\partial t^2}$

$$\nabla^2 \overline{Y} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{Y}}{\partial t^2} = -\sum_N \left(\sum_L \lambda_{YL} \cdot \lambda_{LN}\right) \cdot \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial t^2}$$

$$\sum_N \left(\sum_L \lambda_{YL} \cdot \lambda_{LN}\right) \cdot \frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{Y}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t^2}\sum_N \left(\sum_L \lambda_{YL} \cdot \lambda_{LN}\right) \cdot \overline{N} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overline{Y}}{\partial t^2}$$

$$\sum_L \lambda_{YL} \cdot \lambda_{LN} = \begin{cases} -1/c^2 & , N = Y \\ 0 & , N \neq Y \end{cases} .$$

В матричной записи:

$(\lambda)\cdot(\lambda) = -\frac{1}{c^2}\cdot(I)$, *где* (I)*– единичная матрица.*

Таким образом, условие существования волн

$$(\lambda)\cdot(\lambda) = -\frac{1}{c^2}\cdot(I) \quad .$$

II. Поперечность волн единого поля.

Известно, что электромагнитные волны являются поперечными. Это означает, что электрическое поле $\overline{\mathrm{E}}$ и магнитное поле $\overline{\mathrm{H}}$ плоской волны направлены перпендикулярно направлению распространения электромагнитной волны.

Так как уравнения единого векторного поля являются обобщением уравнений Максвелла, то следует ожидать, что волны единого векторного поля также будут поперечными.

Плоская волна, распространяющаяся в направлении оси ОХ, описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad .$$

Волна единого поля описывается уравнениями:

$$\nabla^2 \overline{Y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \overline{Y}}{\partial t^2} \quad .$$

Плоская волна единого поля, распространяющаяся в направлении оси OX, описывается уравнениями:

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2} \overline{\mathrm{Y}} = \frac{1}{\mathrm{c}^2} \frac{\partial^2 \overline{\mathrm{Y}}}{\partial \mathrm{t}^2} \quad .$$

В этом случае поле зависит от одной пространственной координаты x и не зависит от координат y и z, то есть

$$\frac{\partial}{\partial y} \overline{Y} = 0 \quad и \quad \frac{\partial}{\partial z} \overline{Y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} \overline{\Phi}_Y = 0 \quad и \quad \frac{\partial}{\partial z} \overline{\Phi}_Y = 0 \quad .$$

В пустом пространстве уравнения поля

$$rot \overline{Y} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{\Phi}_Y \quad , \quad div\, \overline{Y} = 0$$

$$rot_x \overline{Y} = \frac{\partial}{\partial y} Y_z - \frac{\partial}{\partial z} Y_y = 0 - 0 = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_x$$

$$rot_y \overline{Y} = \frac{\partial}{\partial z} Y_x - \frac{\partial}{\partial x} Y_z = 0 - \frac{\partial}{\partial x} Y_z = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_y$$

$$rot_z \overline{Y} = \frac{\partial}{\partial x} Y_y - \frac{\partial}{\partial y} Y_x = \frac{\partial}{\partial x} Y_y - 0 = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_z$$

$$div\, \overline{Y} = \frac{\partial}{\partial x} Y_x + \frac{\partial}{\partial y} Y_y + \frac{\partial}{\partial z} Y_z = \frac{\partial}{\partial x} Y_x + 0 + 0 = 0 \quad .$$

Сопутствующие уравнения $\quad rot \overline{\Phi}_Y = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{Y}$

$$rot_x \overline{\Phi}_Y = \frac{\partial}{\partial y} \Phi_z - \frac{\partial}{\partial z} \Phi_y = 0 - 0 = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} Y_x$$

$$rot_y \overline{\Phi} = \frac{\partial}{\partial z} \Phi_x - \frac{\partial}{\partial x} \Phi_z = 0 - \frac{\partial}{\partial x} \Phi_z = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} Y_y$$

$$rot_z\overline{\Phi}=\frac{\partial}{\partial x}\Phi_y-\frac{\partial}{\partial y}\Phi_x=\frac{\partial}{\partial x}\Phi_y-0=-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}Y_z$$

$$div\,\overline{\Phi}_Y=\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{Yx}+\frac{\partial}{\partial y}\Phi_{Yy}+\frac{\partial}{\partial z}\Phi_{Yz}=\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{Yx}+0+0=0\quad .$$

Таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}Y_x=0\ ,\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi_x=0\ ,\frac{\partial}{\partial x}Y_x=0\ ,\ \frac{\partial}{\partial x}\Phi_x=0\quad .$$

То есть напряженности полей $\overline{\mathrm{Y}}$ и соответствующие им напряженности магнитных полей $-\overline{\Phi}_Y$ в направлении оси OX не меняются ни со временем, ни по направлению оси OX. На этом основании делаем вывод, что волны единого векторного поля являются поперечными.

§7 Сила, действующая на частицу со стороны поля. 4вектор плотности силы. Сила, действующая между двумя частицами.

I. Введем обозначение:

$$\overline{\Phi}_Y=\sum_L\lambda_{YL}\cdot\overline{L}\quad ,\quad \beta=\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}\quad .$$

Формулы преобразования напряженностей полей при переходе от одной ИСО к другой:

$$Y'_x=Y_x\qquad Y'_y=\frac{Y_y+\mathrm{v}\cdot\Phi_{Yz}}{\beta}\qquad\qquad Y'_z=\frac{Y_z-\mathrm{v}\cdot\Phi_{Yy}}{\beta}$$

$$\overline{Y}=Y_x\cdot\overline{i}+Y_Y\cdot\overline{j}+Y_z\cdot\overline{k}$$

$$\overline{Y'}=Y'_x\cdot\overline{i'}+Y'_y\cdot\overline{j'}+Y'_z\cdot\overline{k'}$$

$$\bar{\mathrm{v}}\times\left(-\bar{\Phi}_Y\right)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \mathrm{v} & 0 & 0\\ -\Phi_{Y\,x} & -\Phi_{Y\,y} & -\Phi_{Y\,z}\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}0 & 0\\ -\Phi_{Y\,y} & -\Phi_{Y\,z}\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}\mathrm{v} & 0\\ -\Phi_{Y\,x} & -\Phi_{Y\,z}\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}\mathrm{v} & 0\\ -\Phi_{Y\,x} & -\Phi_{Y\,y}\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\cdot\bar{0}+\bar{j}\cdot\left(\mathrm{v}\cdot\Phi_z\right)-\bar{k}\cdot\left(\mathrm{v}\cdot\Phi_y\right)\ .$$

Тогда $\overline{Y'}=\frac{1}{\beta}\cdot\left(\bar{Y}+\bar{\mathrm{v}}\times\left(-\bar{\Phi}_Y\right)\right)$.

Или при малых скоростях $\mathrm{v}\ll c$, *т.е.* $\beta=1$,

$\overline{Y'}=\bar{Y}+\bar{\mathrm{v}}\times\left(-\bar{\Phi}_Y\right)$. В системе отсчета $\mathrm{O'X'Y'Z'}$, в которой частица движется, на нее действует сила

$$\bar{f}=\sum_Y q_Y\cdot\overline{Y'}=\sum_Y q_Y\cdot\left(\bar{Y}+\bar{\mathrm{v}}\times\left(-\bar{\Phi}_Y\right)\right)\ .$$

Это есть сила Лоренца, действующая на частицу с набором зарядов $\{\mathrm{q}\}$. Из последней формулы видно, что каждое поле $\bar{\mathrm{Y}}$ действует не на любой заряд частицы, а только на заряд q_Y , соответствующий полю $\bar{\mathrm{Y}}$.

II. Проведем рассуждения:

$$\bar{j}_Y\times\left(-\bar{\Phi}_Y\right)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ j_{Y\,x} & j_{Y\,y} & j_{Y\,z}\\ -\Phi_{Y\,x} & -\Phi_{Y\,y} & -\Phi_{Y\,z}\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}j_{Y\,y} & j_{Y\,z}\\ -\Phi_{Y\,y} & -\Phi_{Y\,z}\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}j_{Y\,x} & j_{Y\,z}\\ -\Phi_{Y\,x} & -\Phi_{Y\,z}\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}j_{Y\,x} & j_{Y\,y}\\ -\Phi_{Y\,x} & -\Phi_{Y\,y}\end{vmatrix}=$$

$$= \bar{i}\cdot\left(j_{Y\,y}\cdot\left(-\Phi_{Y\,z}\right)-j_{Y\,z}\cdot\left(-\Phi_{Y\,y}\right)\right)-$$
$$-\bar{j}\cdot\left(j_{Y\,x}\cdot\left(-\Phi_{Y\,z}\right)-j_{Y\,z}\cdot\left(-\Phi_{Y\,x}\right)\right)+$$
$$+\bar{k}\cdot\left(j_{Y\,x}\cdot\left(-\Phi_{Y\,y}\right)-j_{Y\,y}\cdot\left(-\Phi_{Y\,x}\right)\right)$$

$$\frac{1}{c}\cdot\sum_k F_Y^{\;ik}\cdot j_{Y\,k} =$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -Y_x & -Y_y & -Y_z \\ Y_x & 0 & -c\cdot\left(-\Phi_{Y\,z}\right) & c\cdot\left(-\Phi_{Y\,y}\right) \\ Y_y & c\cdot\left(-\Phi_{Y\,z}\right) & 0 & -c\cdot\left(-\Phi_{Y\,x}\right) \\ Y_z & -c\cdot\left(-\Phi_{Y\,y}\right) & c\cdot\left(-\Phi_{Y\,x}\right) & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c\cdot\rho_Y \\ -j_x \\ -j_y \\ -j_z \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{c}\cdot\begin{pmatrix} Y_x\cdot j_{Yx}+Y_y\cdot j_{Yy}+Y_z\cdot j_{Yz} \\ c\cdot\rho_Y\cdot Y_x + j_{Y\,y}\cdot\left(-\Phi_{Y\,z}\right)-j_{Y\,z}\cdot\left(-\Phi_{Y\,y}\right) \\ c\cdot\rho_Y\cdot Y_y - j_{Y\,x}\cdot\left(-\Phi_{Y\,z}\right)+j_{Y\,z}\cdot\left(-\Phi_{Y\,x}\right) \\ c\cdot\rho_Y\cdot Y_z + j_{Y\,x}\cdot\left(-\Phi_{Y\,y}\right)-j_{Yy}\cdot\left(-\Phi_{Y\,x}\right) \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{c}\cdot\left(\bar{j}_Y\cdot\bar{Y},\, c\cdot\rho_Y\cdot\bar{Y}+c\cdot\bar{j}_Y\times\left(-\bar{\Phi}_Y\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{c}\cdot\bar{j}_Y\cdot\bar{Y},\,\rho_Y\cdot\bar{Y}+\bar{j}_Y\times\left(-\bar{\Phi}_Y\right)\right)=f_{пл\,Y}^{\;i}=\left(f_{пл\,Y}^{\;0},\bar{f}_{пл\,Y}\right) \;.$$

Таким образом $\quad f_{пл}^{\;i}=\sum_Y f_{пл\,Y}^{\;i}=\frac{1}{c}\cdot\sum_Y\left(F_Y^{\;ik}\right)\cdot j_{Y\,k}$,

где $\quad f_{пл}^{\;i}$ – 4-вектор плотности силы.

$f_{пл}^{\;0}=\sum_Y \frac{1}{c}\cdot\bar{Y}\cdot\bar{j}=\sum_Y \frac{1}{c}\cdot\rho_Y\cdot\bar{Y}\cdot\bar{\mathrm{v}}$ $\quad$ – *деленная на с, работа в единицу времени, приходящаяся на единицу объема.* (*плотность мощности*) .

$$\overline{f}_{пл} = \sum_{Y} \rho_Y \cdot \overline{Y} + \overline{j}_Y \times \left(-\overline{\Phi}_Y\right) = \sum_{Y} \rho_Y \cdot \overline{Y} + \rho_Y \cdot \overline{\mathrm{v}} \times \left(-\overline{\Phi}_Y\right) -$$

Сила на единицу объема (*плотность силы*) .

Итак, сила Лоренца в единой теории векторных полей:

$$\overline{f} = \sum_{Y} q_Y \cdot \left(\overline{Y} + \overline{\mathrm{v}} \times \left(-\overline{\Phi}_Y\right)\right) .$$

III. Одно из уравнений единого поля

$$div\overline{Y} = \sum_{L} \nu_{YL} \cdot \rho_L$$

в интегральном представлении запишется следующим образом:

$$\oint \overline{Y} dS = \int \sum_{L} \nu_{YL} \cdot \rho_L dV \quad .$$

Поток поля $\overline{\mathrm{Y}}$ через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся в объеме, ограниченной этой поверхностью.

Точечный источник с набором зарядов $q^1_{X_1}$, $q^1_{X_2}$, $\cdots$, $q^1_{X_n}$ порождает поля $\left\{\overline{Y}\right\}$.

Поток поля $\overline{\mathrm{Y}}$ через замкнутую сферическую поверхность, имеющую площадь $4 \cdot \pi \cdot \mathrm{r}^2$ равен

$$\oint \overline{Y} \cdot d\,\overline{S} = \sum_{L} \nu_{YL} \cdot q^1{}_L \quad .$$

Так как поле точечного источника сферически симметрично, то

$$Y \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \sum_{L} \nu_{YL} \cdot q^1{}_L \quad .$$

$$Y = \frac{\sum_{L} \nu_{YL} \cdot q^1{}_L}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{Y} = \frac{\sum_{L} \nu_{YL} \cdot q^1{}_L}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \overline{r}$$

Одновременно с полями $\overline{Y}$ формируются соответствующие им магнитные поля $-\overline{\Phi}_Y = -\sum_L \lambda_{YL} \cdot \overline{L} =$

$$= -\sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\sum_N \nu_{LN} \cdot q^1{}_N}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \overline{r} = -\frac{\sum_N \mu_{YN} \cdot q^1{}_N}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \overline{r} \quad .$$

Рассмотрим частицу 1 с набором зарядов

$q^1_{X_1}$, $q^1_{X_2}$, $\cdots$, $q^1_{X_n}$

и частицу 2 с набором зарядов

$q^2_{X_1}$, $q^2_{X_2}$, $\cdots$, $q^2_{X_n}$.

При взаимодействии двух частиц: частица 1 порождает поля $\{\overline{Y}\}$, которые действуют на частицу 2, движущуюся со скоростью $\overline{\mathrm{v}}$, с силой:

$$\overline{f} = \sum_Y q^2{}_Y \cdot \left(\overline{Y} + \overline{\mathrm{v}} \times \left(-\overline{\Phi}_Y\right)\right) =$$

$$= \sum_Y q^2{}_Y \cdot \frac{\sum_L \nu_{YL} \cdot q^1{}_L}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \overline{r} + \sum_Y q^2{}_Y \cdot \overline{\mathrm{v}} \times \left(-\frac{\sum_N \mu_{YN} \cdot q^1{}_N}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \overline{r} \right) =$$

$$= \sum_Y \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q^2{}_Y \cdot q^1{}_L}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \overline{r} - \sum_Y \sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot q^2{}_Y \cdot q^1{}_L}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{r}\right].$$

Если частица 2 покоится $\overline{\mathrm{v}} = 0$, то сила между частицами будет определяться обобщенным законом Кулона:

$$\overline{f} = \sum_Y \sum_X \frac{q^2_Y \cdot \nu_{YX} \cdot q^1_X}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \overline{r} \; .$$

Частица 1 действует на частицу 2 с силой:

$$\overline{f}_{21} = \sum_Y \sum_X \frac{q^2_Y \cdot \nu_{YX} \cdot q^1_X}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \overline{r}$$

Частица 2 действует на частицу 1 с силой:

$$\overline{f}_{12} = \sum_Y \sum_X \frac{q^1_Y \cdot \nu_{YX} \cdot q^2_X}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \left(-\overline{r}\right) = -\sum_Y \sum_X \frac{q^1_Y \nu_{YX} \cdot q^2_X}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot$$

Рассмотрим случай, когда частицы являются монополями: частица 1 имеет только один заряд q_X^1, а частица 2 имеет только один заряд q_Y^2.

Тогда:

$$\overline{f}_{21} = \frac{q_Y^2 \cdot \nu_{YX} \cdot q_X^1}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \overline{r} \quad , \qquad \overline{f}_{12} = -\frac{q_X^1 \cdot \nu_{XY} \cdot q_Y^2}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \overline{r} \quad .$$

Исходя из третьего закона Ньютона о силах действия и противодействия: $\overline{f}_{12} = -\overline{f}_{21}$, получаем условие

$$\nu_{YX} = \nu_{XY} \ .$$

IV. Если частица 2 движется относительно частицы 1 со скоростью $\overline{\mathrm{v}}$, то на нее действует сила

$$f_{21} = \sum_Y \sum_X \frac{q^2{}_Y \cdot \nu_{YX} \cdot q^1{}_X}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \overline{r} - \sum_Y \sum_X \frac{q^2{}_Y \cdot \mu_{YX} \cdot q^1{}_X}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{r}\right]$$

В свою очередь на частицу 1 со стороны частицы 2 действует сила:

$$\overline{f}_{12} = \sum_Y \sum_X \frac{q_X^1 \cdot \nu_{XY} \cdot q_Y^2}{4\pi r^3} \cdot \left(-\overline{r}\right) - \sum_Y \sum_X \frac{q_X^1 \cdot \mu_{XY} \cdot q_Y^2 \cdot}{4\pi r^3} \cdot \left[\left(-\overline{\mathrm{v}}\right) \times \left(-\overline{r}\right)\right].$$

Рассмотрим случай, когда частицы являются монополями: частица 1 имеет только один заряд q_X^1, а частица 2 имеет только один заряд q_Y^2.

Тогда:

$$\overline{f}_{12} = \frac{q_X^1 \cdot \nu_{XY} \cdot q_Y^2}{4\pi r^3} \cdot \overline{r} - \frac{q_X^1 \cdot \mu_{XY} \cdot q_Y^2}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{r}\right] =$$

$$\overline{f}_{21} = \frac{q_Y^2 \cdot \nu_{YX} \cdot q_X^1}{4\pi r^3} \cdot \left(-\overline{r}\right) - \frac{q_Y^2 \cdot \mu_{YX} \cdot q_X^1}{4\pi r^3} \cdot \left[\left(-\overline{\mathrm{v}}\right) \times \left(-\overline{r}\right)\right] \quad .$$

Силу, действующую на частицу, представим в виде суммы двух составляющих.

$$\overline{f}_{12} = \overline{f'}_{12} + \overline{f''}_{12} \ , \qquad \overline{f}_{21} = \overline{f'}_{21} + \overline{f''}_{21} \ ,$$

$$\overline{f'}_{21} = \frac{q_Y^2 \cdot \nu_{YX} \cdot q_X^1}{4\pi r^3} \cdot (\bar{r})$$

$$\overline{f'}_{12} = -\frac{q_X^1 \cdot \nu_{XY} \cdot q_Y^2}{4\pi r^3} \cdot \bar{r}$$

$$\overline{f''}_{21} = -\frac{q_Y^2 \cdot \mu_{YX} \cdot q_X^1}{4\pi r^3} \cdot [\bar{v} \times \bar{r}]$$

$$\overline{f''}_{12} = -\frac{q_X^1 \cdot \mu_{XY} \cdot q_Y^2}{4\pi r^3} \cdot [\bar{v} \times \bar{r}]$$

Анализируя эти составляющие, можно сказать следующее:

$\overline{f'}_{12}$ и $\overline{f'}_{21}$ будут подчиняться третьему закону Ньютона. $\overline{f'}_{12} = -\overline{f'}_{21}$ при условии $\nu_{YX} = \nu_{XY}$.

$\overline{f''}_{12}$ и $\overline{f''}_{21}$ будут подчиняться третьему закону Ньютона. $\overline{f''}_{12} = -\overline{f''}_{21}$ при условии $\mu_{YX} = -\mu_{XY}$.

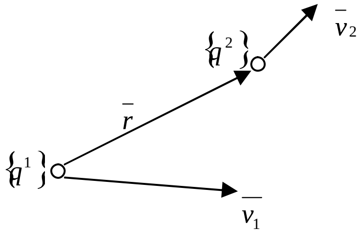
В §16 из принципа наименьшего действия получены уравнения поля при условии: $\nu_{YX} = \nu_{XY}$, $\mu_{YX} = \mu_{XY}$.

Примем эти условия за аксиому. Тогда при взаимодействии двух частиц третий закон Ньютона в единой теории поля запишется в виде $\overline{f'}_{12} = -\overline{f'}_{21}$, $\overline{f''}_{12} = \overline{f''}_{21}$.

Таким образом $\nu_{YX} = \nu_{XY}$

$\mu_{YX} = \mu_{XY}$.

V. Рассмотрим взаимодействие двух частиц, имеющих наборы зарядов $\{q^1\}$ и $\{q^2\}$, движущихся соответственно со скоростями $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$.



Опыт дает, что в случае, когда $\mathrm{v} \ll c$, магнитная индукция поля движущегося электрического заряда определяется формулой

$$\overline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot \left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{r}\right]}{r^3} \quad .$$

Обобщим эту формулу для единой теории

$$\overline{Y} = \sum_L \frac{\mu_{YL}}{4\pi} \cdot \frac{q_L \cdot \left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{r}\right]}{r^3} \quad .$$

Твердой уверенности в справедливости последней формулы нет. Поэтому рассуждения и выводы этого пункта являются предположительными.

В точке 2 частица 1 создает набор полей $\left\{\overline{Y}_2\right\}$.

$$\overline{Y}_2 = \overline{Y'}_2 + \overline{Y''}_2$$

$$\overline{Y'}_2 = \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L^1}{4\pi r^3} \cdot \left(\overline{r}\right) \quad ; \quad \overline{Y''}_2 = \sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot q_L^1}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{\mathrm{v}}_1 \times \overline{r}\right] \quad .$$

$$\overline{Y}_2 = \overline{Y'}_2 + \overline{Y''}_2 = \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L^1}{4\pi r^3} \cdot \left(\overline{r}\right) + \sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot q_L^1}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{\mathrm{v}}_1 \times \overline{r}\right].$$

$$\overline{\Phi}_{Y2} = \sum_N \lambda_{YN} \cdot \overline{N}_2 =$$

$$= \sum_N \lambda_{YN} \cdot \sum_L \frac{\nu_{NL} \cdot q_L^1}{4\pi r^3} \cdot \left(\overline{r}\right) + \sum_N \lambda_{YN} \cdot \sum_L \frac{\mu_{NL} \cdot q_L^1}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{\mathrm{v}}_1 \times \overline{r}\right] =$$

$$= /\ т.к.\ \ (\lambda)\cdot(\nu)=(\mu),$$

$$(\lambda)\cdot(\mu)=-\frac{1}{c^2}(\nu);\ см.\ \S 8\ часть\, II\quad / =$$

$$=\sum_L \frac{\mu_{YL}\cdot q_L^1}{4\pi r^3}\cdot\left(\bar r\right)-\frac{1}{c^2}\cdot\sum_L\frac{\nu_{YL}\cdot q_L^1}{4\pi r^3}\cdot\left[\bar{\mathrm v}_1\times\bar r\right].$$

Сила, действующая на частицу 2 со стороны частицы 1 равна

$$\bar f_{21}=\sum_Y q^2{}_Y\cdot\left(\bar Y_2+\bar{\mathrm v}_2\times\left(-\bar\Phi_{Y2}\right)\right)=$$

$$=\sum_Y q_Y^2\cdot\left(\sum_L\frac{\nu_{YL}\cdot q_L^1}{4\pi r^3}\cdot\left(\bar r\right)+\sum_L\frac{\mu_{YL}\cdot q_L^1}{4\pi r^3}\cdot\left[\bar{\mathrm v}_1\times\bar r\right]\right)+$$

$$+\sum_Y q_Y^2\cdot\left[\bar{\mathrm v}_2\times\left(-\sum_L\frac{\mu_{YL}\cdot q_L^1}{4\pi r^3}\cdot\left(\bar r\right)+\frac{1}{c^2}\cdot\sum_L\frac{\nu_{YL}\cdot q_L^1}{4\pi r^3}\cdot\left[\bar{\mathrm v}_1\times\bar r\right]\right)\right].$$

$$\bar f_{21}=\sum_Y q_Y^2\cdot\sum_L\frac{\nu_{YL}\cdot q_L^1}{4\pi r^3}\cdot\left(\bar r\right)+\sum_Y q_Y^2\cdot\sum_L\frac{\mu_{YL}\cdot q_L^1}{4\pi r^3}\cdot\left[\bar{\mathrm v}_1\times\bar r\right]-$$

$$-\sum_Y q_Y^2\cdot\sum_L\frac{\mu_{YL}\cdot q_L^1}{4\pi r^3}\cdot\left[\bar{\mathrm v}_2\times\bar r\right]+\frac{1}{c^2}\cdot\sum_Y q_Y^2\cdot\sum_L\frac{\nu_{YL}\cdot q_L^1}{4\pi r^3}\cdot\left[\bar{\mathrm v}_2\times\left[\bar{\mathrm v}_1\times\bar r\right]\right].$$

Проводя аналогичные рассуждения, получим выражение для силы, действующей на частицу 1 со стороны частицы 2.

$$\bar f_{12}=\sum_Y q^1{}_Y\cdot\left(\bar Y_1+\bar{\mathrm v}_1\times\left(-\bar\Phi_{Y1}\right)\right)=\sum_Y q_Y^1\cdot\sum_L\frac{\nu_{YL}\cdot q_L^2}{4\pi r^3}\cdot\left(-\bar r\right)+$$

$$+\sum_Y q_Y^1\cdot\sum_L\frac{\mu_{YL}\cdot q_L^2}{4\pi r^3}\cdot\left[\bar{\mathrm v}_2\times\left(-\bar r\right)\right]-$$

$$-\sum_Y q_Y^1\cdot\sum_L\frac{\mu_{YL}\cdot q_L^2}{4\pi r^3}\cdot\left[\bar{\mathrm v}_1\times\left(-\bar r\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{c^2}\cdot\sum_Y q_Y^1\cdot\sum_L\frac{\nu_{YL}\cdot q_L^2}{4\pi r^3}\cdot\left[\bar{\mathrm v}_1\times\left[\bar{\mathrm v}_2\times\left(-\bar r\right)\right]\right].$$

$$\overline{f}_{12} = -\sum_Y q_Y^1 \cdot \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L^2}{4\pi r^3} \cdot \overline{r} - \sum_Y q_Y^1 \cdot \sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot q_L^2}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{v}_2 \times \overline{r}\right] +$$

$$+ \sum_Y q_Y^1 \cdot \sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot q_L^2}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{v}_1 \times \overline{r}\right] -$$

$$- \frac{1}{c^2} \cdot \sum_Y q_Y^1 \cdot \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L^2}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{v}_1 \times \left[\overline{v}_2 \times \overline{r}\right]\right] .$$

Рассмотрим случай, когда частицы являются монополями: частица 1 имеет только один заряд q_X^1 , а частица 2 имеет только один заряд q_Y^2 .

Тогда:

$$\overline{f}_{21} = \frac{q_Y^2 \cdot \nu_{YX} \cdot q_X^1}{4\pi r^3} \cdot \left(\overline{r}\right) + \frac{q_Y^2 \cdot \mu_{YX} \cdot q_X^1}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{v}_1 \times \overline{r}\right] -$$

$$- \frac{q_Y^2 \cdot \mu_{YX} \cdot q_X^1}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{v}_2 \times \overline{r}\right] + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{q_Y^2 \cdot \nu_{YX} \cdot q_X^1}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{v}_2 \times \left[\overline{v}_1 \times \overline{r}\right]\right].$$

$$\overline{f}_{12} = -\frac{q_X^1 \cdot \nu_{XY} \cdot q_Y^2}{4\pi r^3} \cdot \overline{r} - \frac{q_X^1 \cdot \mu_{XY} \cdot q_Y^2}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{v}_2 \times \overline{r}\right] +$$

$$+ \frac{q_X^1 \cdot \mu_{XY} \cdot q_Y^2}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{v}_1 \times \overline{r}\right] - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{q_X^1 \cdot \nu_{YX} \cdot q_Y^2}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{v}_1 \times \left[\overline{v}_2 \times \overline{r}\right]\right].$$

Силу, действующую на частицу, представим в виде суммы трех составляющих.

$$\overline{f}_{12} = \overline{f'}_{12} + \overline{f''}_{12} + \overline{f'''}_{12}, \qquad \overline{f}_{21} = \overline{f'}_{21} + \overline{f''}_{21} + \overline{f'''}_{21} ,$$

$$\overline{f'}_{21} = \frac{q_Y^2 \cdot \nu_{YX} \cdot q_X^1}{4\pi r^3} \cdot \left(\overline{r}\right)$$

$$\overline{f'}_{12} = -\frac{q_X^1 \cdot \nu_{XY} \cdot q_Y^2}{4\pi r^3} \cdot \overline{r}$$

$$\overline{f''}_{21} = \sum_L \frac{q_Y^2 \cdot \mu_{YX} \cdot q_X^1}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{v}_1 \times \overline{r}\right] - \frac{q_Y^2 \cdot \mu_{YX} \cdot q_X^1}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{v}_2 \times \overline{r}\right]$$

$$\overline{f''}_{12} = -\frac{q_X^1 \cdot \mu_{XY} \cdot q_Y^2}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{v}_2 \times \overline{r}\right] + \frac{q_X^1 \cdot \mu_{XY} \cdot q_Y^2}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{v}_1 \times \overline{r}\right]$$

$$\overline{f'''}_{21} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{q_Y^2 \cdot \nu_{YX} \cdot q_X^1}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{v}_2 \times \left[\overline{v}_1 \times \overline{r}\right]\right]$$

$$\overline{f'''}_{12} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{q_X^1 \cdot \nu_{XY} \cdot q_Y^2}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{v}_1 \times \left[\overline{v}_2 \times \overline{r}\right]\right] .$$

$\overline{f'''}_{12}$ и $\overline{f'''}_{21}$ не подчиняются третьему закону Ньютона.

$$\overline{f'''}_{12} \neq -\overline{f'''}_{21} .$$

Для того, чтобы выполнялись условия: $\nu_{YX} = \nu_{XY}$, $\mu_{YX} = \mu_{XY}$, третий закон Ньютона при взаимодействии двух частиц должен быть записан в виде

$$\overline{f'}_{12} = -\overline{f'}_{21} ,$$

$$\overline{f''}_{12} = \overline{f''}_{21} .$$

Выводы п.V (предположительные):

Сила, действующая на частицу со стороны поля

$$\overline{f} = \sum_Y q_Y \cdot \left(\overline{Y} + \overline{v} \times \left(-\overline{\Phi}_Y\right)\right)$$

Сила, действующая на частицу 2 со стороны частицы 1 равна

$$\overline{f}_{21} = \sum_Y q_Y^2 \cdot \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L^1}{4\pi r^3} \cdot \left(\overline{r}\right) + \sum_Y q_Y^2 \cdot \sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot q_L^1}{4\pi r^3} \cdot \left[\left(\overline{v}_1 - \overline{v}_2\right) \times \overline{r}\right] +$$

$$+ \frac{1}{c^2} \cdot \sum_Y q_Y^2 \cdot \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L^1}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{v}_2 \times \left[\overline{v}_1 \times \overline{r}\right]\right].$$

Эта сила зависит не только от величин зарядов и скоростей частиц, но и от разности скоростей этих частиц.

Третий закон Ньютона для взаимодействующих частиц формулируется таким образом, чтобы выполнялись соотношения:

$$\nu_{YX} = \nu_{XY}$$

$$\mu_{YX} = \mu_{XY} \quad .$$

§ 8 Свойства матриц λ, ν, μ . Сопутствующие уравнения единого поля.

I. Свойства матриц:

1. В §2 часть II показано, что требование релятивисткой инвариантности уравнений единого векторного поля приводит к условию:

$$(\lambda)\cdot(\lambda) = -\frac{1}{c^2}\cdot(I) \ ,$$

где (I) – единичная матрица, c – предельная скорость распространения взаимодействий.

В §6 часть II показано, что к этому же условию приводит требование существования волн поля.

2. В §3 часть II показано, что из требования выполнения закона сохранения заряда каждого вида:

$$div\,\bar{j}_Y + \frac{\partial \rho_Y}{\partial t} = 0$$

вытекает условие: $(\lambda) = (\mu)\cdot(\nu)^{-1}$.

3. В §7 часть II из анализа сил, с которыми взаимодействуют два монополя, показано, что могут выполняться условия:

$$\begin{matrix} \nu_{YX} = \nu_{XY} \\ \mu_{YX} = -\mu_{XY} \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} \nu_{YX} = \nu_{XY} \\ \mu_{YX} = \mu_{XY} \end{matrix} \ .$$

Принимая формулировку третьего закона Ньютона для единой теории, изложенную в §7 части II , получаем условия

$$\begin{matrix} \nu_{YX} = \nu_{XY} \\ \mu_{YX} = \mu_{XY} \end{matrix} \ ,$$

используя которые в §16 выводятся уравнения поля из принципа наименьшего действия для единого поля.

4. Из п. 1 и п. 2 вытекают следующие свойства:

$$-c^2\cdot(\lambda)\cdot(\lambda) = (I) \quad \Rightarrow \quad (\lambda)^{-1} = -c^2\cdot(\lambda)$$

$$(\lambda)\cdot(\nu)=(\mu)\cdot(\nu)^{-1}\cdot(\nu)=(\mu)$$

$$(\lambda)\cdot(\mu)=(\lambda)\cdot(\mu)\cdot(\nu)^{-1}\cdot(\nu)=(\lambda)\cdot(\lambda)\cdot(\nu)=\left(-\frac{1}{c^2}\right)\cdot(\nu)$$

$$(\lambda)=-\frac{1}{c^2}\cdot(\nu)\cdot(\mu)^{-1}\ .$$

Таким образом, свойства матриц $(\lambda), (\nu), (\mu)$:

$$\nu_{YX}=\nu_{XY}$$

$$\mu_{YX}=\mu_{XY}$$

$$(\lambda)\cdot(\lambda)=-\frac{1}{c^2}\cdot(I)$$

$$(\lambda)^{-1}=-c^2\cdot(\lambda)$$

$$(\lambda)=(\mu)\cdot(\nu)^{-1}$$

$$(\lambda)\cdot(\nu)=(\mu)$$

$$(\lambda)\cdot(\mu)=\left(-\frac{1}{c^2}\right)\cdot(\nu)$$

$$(\lambda)=-\frac{1}{c^2}\cdot(\nu)\cdot(\mu)^{-1}\ .$$

II. Сопутствующие уравнения единого поля.

Уравнения единого поля

$$div\overline{Y}=\sum_L \nu_{YL}\cdot\rho_L$$

$$rot\overline{Y}=\sum_L \mu_{YL}\cdot\overline{j}_L+\sum_L \lambda_{YL}\cdot\frac{\partial\overline{L}}{\partial t}\ .$$

Запишем уравнения единого поля в матричной форме :

$$div\left\{\overline{Y}\right\}=(\nu)\cdot\{\rho\}$$

$$rot\left\{\overline{Y}\right\}=(\mu)\cdot\left\{\overline{j}\right\}+(\lambda)\cdot\left\{\frac{\partial\overline{L}}{\partial t}\right\}\ .$$

Умножим слева обе части каждого уравнения на матрицу (λ).

Получим:

$$div(\lambda)\cdot\{\overleftarrow{Y}\}=(\lambda)\cdot(\nu)\cdot\{\rho\}$$

$$rot(\lambda)\cdot\{\overleftarrow{Y}\}=(\lambda)\cdot(\mu)\cdot\{\overleftarrow{j}\}+(\lambda)\cdot(\lambda)\cdot\left\{\frac{\partial\overline{L}}{\partial t}\right\} \quad .$$

Учитывая, что $(\lambda)\cdot\{\overleftarrow{Y}\}=\{\overleftarrow{\Phi}_Y\} \Leftrightarrow \overline{\Phi}_Y=\sum_L \nu_{YL}\cdot\overline{L}$,

получим

$$div\{\overleftarrow{\Phi}_Y\}=(\mu)\cdot\{\rho\}$$

$$rot\{\overleftarrow{\Phi}_Y\}=-\frac{1}{c^2}\cdot(\nu)\cdot\{\overleftarrow{j}\}-\frac{1}{c^2}\cdot\left\{\frac{\partial\overline{Y}}{\partial t}\right\} \quad .$$

В обычной записи:

$$div\overline{\Phi}_Y=\sum_L \mu_{YL}\cdot\rho_L$$

$$rot\overline{\Phi}_Y=-\frac{1}{c^2}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot\overline{j}_L-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial\overline{Y}}{\partial t}$$

или

$$div\left(-\overline{\Phi}_Y\right)=-\sum_L \mu_{YL}\cdot\rho_L$$

$$rot\left(-\overline{\Phi}_Y\right)=\frac{1}{c^2}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot\overline{j}_L+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial\overline{Y}}{\partial t} \quad .$$

Эти уравнения назовем сопутствующими уравнениями единого поля.

§ 9 Полуклассический вывод условия зарядового квантования.

Рассматривая движение одной частицы, с набором зарядов $\{q^1\}$, относительно другой частицы, с набором зарядов $\{q^2\}$, и проводя рассуждения, изложенные в [3] для теории магнитного монополя, выведем условие зарядового квантования для общей теории. Если частица 2 движется со скоростью $\overline{\mathrm{v}}$, относительно частицы 1, то на нее действует сила :

$$\overline{f} = \sum_Y \sum_X \frac{\nu_{YX} \cdot q_Y^1 \cdot q_X^2}{4\pi \cdot r^3} \cdot \overline{r} - \sum_Y \sum_X \frac{\mu_{YX} \cdot q_Y^1 \cdot q_X^2}{4\pi \cdot r^3} \cdot \left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{r}\right]$$

$$m \cdot \frac{d\overline{\mathrm{v}}}{dt} = \sum_Y \sum_X \frac{q_Y^1 \cdot q_X^2}{4\pi r^3} \cdot \left(\nu_{YX} \cdot \overline{r} - \mu_{YX} \cdot \left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{r}\right] \right) \quad .$$

Умножим слева обе части последнего равенства на $\overline{\mathrm{r}}$:

$$m \cdot \left[\overline{r} \times \frac{d\overline{\mathrm{v}}}{dt} \right] = \sum_Y \sum_X \frac{q_Y^1 \cdot q_X^2}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{r} \times \left(\nu_{YX} \cdot \overline{r} - \mu_{YX} \cdot \left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{r}\right] \right) \right] =$$

$$= -\sum_Y \sum_X \frac{q_Y^1 \cdot q_X^2}{4\pi r^3} \cdot \left[\overline{r} \times \mu_{YX} \cdot \left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{r}\right] \right] =$$

$$= \quad / \quad \left[\overline{r} \times \left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{r}\right] \right] = \overline{\mathrm{v}} \cdot \left(\overline{r} \cdot \overline{r}\right) - \overline{r} \cdot \left(\overline{r} \cdot \overline{\mathrm{v}}\right) = \overline{\mathrm{v}} \cdot r^2 - \overline{r} \cdot \left(\overline{r} \cdot \overline{\mathrm{v}}\right)$$

$$\frac{\left[\overline{r} \times \left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{r}\right] \right]}{r^3} = \frac{\overline{\mathrm{v}} \cdot r^2 - \overline{r} \cdot \left(\overline{r} \cdot \overline{\mathrm{v}}\right)}{r^3} = \frac{\overline{\mathrm{v}} \cdot r}{r^2} - \frac{\overline{r} \cdot \left(\overline{r} \cdot \overline{\mathrm{v}}\right)}{r^3} =$$

$$= \frac{\overline{\mathrm{v}} \cdot r}{r^2} - \frac{\overline{r} \cdot \left(r \cdot \mathrm{v} \cdot \cos\alpha\right)}{r^3} = \frac{\overline{\mathrm{v}} \cdot r - \overline{r} \cdot \left(\mathrm{v} \cdot \cos\alpha\right)}{r^2} =$$

$$= \frac{\overline{r'} \cdot r - \overline{r} \cdot r'}{r^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{r}}{r} \right) \quad / =$$

$$= -\sum_Y \sum_X \frac{\mu_{YX} \cdot q_Y^1 \cdot q_X^2}{4\pi} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{r}}{r} \right) \quad .$$

Таким образом:

$$m \cdot \left[\overline{r} \times \frac{d\overline{\mathrm{v}}}{dt} \right] = \left[\overline{r} \times \frac{d\overline{p}}{dt} \right] = -\sum_Y \sum_X \frac{\mu_{YX} \cdot q_Y^1 \cdot q_X^2}{4\pi} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{r}}{r} \right) \quad .$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{r}\times\bar{p}\right]=\left[\frac{d\bar{r}}{dt}\times\bar{p}\right]+\left[\bar{r}\times\frac{d\bar{p}}{dt}\right]=0+\left[\bar{r}\times\frac{d\bar{p}}{dt}\right]=\left[\bar{r}\times\frac{d\bar{p}}{dt}\right],$$

окончательно получим

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{r}\times\bar{p}\right]+\sum_Y\sum_X\frac{\mu_{YX}\cdot q_Y^1\cdot q_X^2}{4\pi}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\left[\bar{r}\times\bar{p}\right]+\sum_Y\sum_X\frac{\mu_{YX}\cdot q_Y^1\cdot q_X^2}{4\pi}\cdot\frac{\bar{r}}{r}\right)=0 \quad .$$

Величина $\bar{J}=\left[\bar{r}\times\bar{p}\right]+\sum_Y\sum_X\frac{\mu_{YX}\cdot q_Y^1\cdot q_X^2}{4\pi}\cdot\frac{\bar{r}}{r}$ играет роль углового момента.

Проецируем $\bar{J}$ на направление $\bar{e}=\frac{\bar{r}}{r}$.

$$J_e=\bar{J}\cdot\bar{e}=\left[\bar{r}\times\bar{p}\right]\cdot\frac{\bar{r}}{r}+\sum_Y\sum_X\frac{\mu_{YX}\cdot q_Y^1\cdot q_X^2}{4\pi}\cdot\frac{\bar{r}}{r}\cdot\frac{\bar{r}}{r}=$$

$$=0+\sum_Y\sum_X\frac{\mu_{YX}\cdot q_Y^1\cdot q_X^2}{4\pi} \quad .$$

Но величина J_e квантуется $J_e=n\cdot\hbar$.

Получаем условие зарядового квантования

$$\sum_Y\sum_X\mu_{YX}\cdot q_Y^1\cdot q_X^2=4\pi n\hbar \quad , \ n-\text{полуцелое} \quad .$$

Если рассмотреть случай, когда частицы имеют одинаковый набор зарядов $\{q^1\}=\{q^2\}=\{q\}$, то получим условие:

$$\sum_Y\sum_X\mu_{YX}\cdot q_Y\cdot q_X=4\pi n\hbar \quad .$$

Частица может иметь только такой набор зарядов, который удовлетворяет этому условию.

Если рассмотреть случай, когда частицы представляют собой монополи с зарядами $\{q^1\} = q_Y$, $\{q^2\} = q_L$, условие зарядового квантования для общей теории примет вид:

$$\mu_{YL} \cdot q_Y \cdot q_L = 4\pi n\hbar \quad .$$

§ 10 Уравнение движения одной частицы в поле другой частицы.

Сила между частицей с набором зарядов $q^1_{X_1}, q^1_{X_2}, \cdots, q^1_{X_n}$

и частицей с набором зарядов $q^2_{X_1}, q^2_{X_2}, \cdots, q^2_{X_n}$

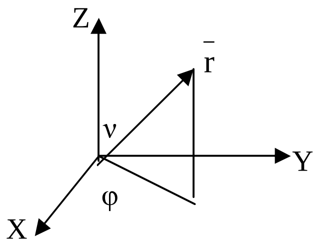
будет определяться обобщенным законом Кулона:

$$\bar{f} = \sum_Y \sum_X \frac{\nu_{YX} \cdot q^1_Y \cdot q^2_X}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \bar{r}.$$

Если частица 2 движется со скоростью $\bar{\mathrm{v}}$, относительно частицы 1, то на нее действует сила:

$$\bar{f} = \sum_Y \sum_X \frac{\nu_{YX} \cdot q^1_Y \cdot q^2_X}{4\pi r^3} \cdot \bar{r} - \sum_Y \sum_X \frac{\mu_{YX} \cdot q^1_Y \cdot q^2_X}{4\pi r^3} \cdot \left[\bar{\mathrm{v}} \times \bar{r}\right] \quad .$$

В сферической системе координат:



$$x = r \cdot \sin\nu \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\nu \cdot \cos\varphi$$

$$z = r \cdot \cos\nu$$

$$\left(d\bar{r}\right)^2 = dr^2 + r^2 \cdot d\nu^2 + r^2 \cdot \sin^2\nu \cdot d\varphi^2$$

$$d\bar{r} = \left(d\bar{r}\right)_\varphi \cdot \bar{e}_\varphi + \left(d\bar{r}\right)_\nu \cdot \bar{e}_\nu + \left(d\bar{r}\right)_r \cdot \bar{e}_r$$

Базисные векторы $\bar{e}_r$, $\bar{e}_\nu$, $\bar{e}_\varphi$ сферической системы координат направлены в сторону увеличения соответствующих координат r, ν, φ .

$$(d\bar{r})_\varphi = r \cdot \sin\nu \cdot d\varphi$$

$$(d\bar{r})_\nu = r \cdot d\nu$$

$$(d\bar{r})_r = dr$$

$$d\bar{r} = dr \cdot \bar{e}_r + r \cdot d\nu \cdot \bar{e}_\nu + r \cdot sin\nu \cdot d\varphi \cdot \bar{e}_\varphi .$$

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot \bar{e}_r + r \cdot \frac{d\nu}{dt} \cdot \bar{e}_\nu + r \cdot sin\nu \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \bar{e}_\varphi .$$

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_r{}^2 + \mathrm{v}_\nu{}^2 + \mathrm{v}_\varphi{}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \cdot \left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 + r^2 \cdot \sin^2\nu \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 .$$

Пусть $\bar{N}$ – *вектор момента импульса частицы* ,

$\bar{p}$ – *импульс частицы,*

$\bar{f}$ – *сила, действующая на частицу.*

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\bar{r} \times \bar{p}\right] = \left[\frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{p}\right] + \left[\bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt}\right] = \left[\bar{\mathrm{v}} \times \bar{p}\right] + \left[\bar{r} \times \bar{f}\right] = \left[\bar{r} \times \bar{f}\right].$$

Таким образом $\frac{d\bar{N}}{dt} = \left[\bar{r} \times \bar{f}\right]$.

В нашем случае

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \left[\bar{r} \times \bar{f}\right] = [\ \bar{r} \times (\ \sum_Y \sum_X \frac{\nu_{YX} \cdot q_Y^1 \cdot q_X^2}{4\pi r^3} \cdot \bar{r} -$$

$$- \sum_Y \sum_X \frac{\mu_{YX} q_Y^1 \cdot q_X^2}{4\pi r^3} \cdot \left[\bar{\mathrm{v}} \times \bar{r}\right])] =$$

$$= -[\ \bar{r} \times \sum_Y \sum_X \frac{\mu_{YX} \cdot q_Y^1 \cdot q_X^2}{4\pi r^3} \cdot \left[\bar{\mathrm{v}} \times \bar{r}\right]\ ] .$$

$\frac{d\bar{N}}{dt} \neq 0$. Следовательно, момент импульса не является постоянным вектором.

$$\left[\bar{r}\times\bar{\mathrm{v}}\right]=\begin{vmatrix}\bar{e}_r & \bar{e}_\nu & \bar{e}_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\cdot\dot{\nu} & r\cdot sin\nu\cdot\dot{\varphi}\end{vmatrix}=r^2\cdot\dot{\nu}\cdot\bar{e}_\varphi-r^2\cdot sin\nu\cdot\dot{\varphi}\cdot\bar{e}_\nu\ .$$

$$\left[\bar{r}\times\left[\bar{r}\times\bar{\mathrm{v}}\right]\right]=\begin{vmatrix}\bar{e}_r & \bar{e}_\nu & \bar{e}_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ 0 & -r^2\cdot\sin\nu\cdot\dot{\varphi} & r^2\cdot\dot{\nu}\end{vmatrix}=$$

$$=-r^3\cdot\dot{\nu}\cdot\bar{e}_\nu-r^3\cdot\sin\nu\cdot\dot{\varphi}\cdot\bar{e}_\varphi\ .$$

$$\frac{d\bar{N}}{dt}=-\left[\bar{r}\times\sum_Y\sum_X\frac{\mu_{YX}\cdot q_Y^1\cdot q_X^2}{4\pi r^3}\cdot\left[\bar{\mathrm{v}}\times\bar{r}\right]\right]=$$

$$=\sum_Y\sum_X\frac{\mu_{YX}\cdot q_Y^1\cdot q_X^2}{4\pi r^3}\cdot\left[\bar{r}\times\left[\bar{r}\times\bar{\mathrm{v}}\right]\right]=$$

$$=\sum_Y\sum_X\frac{\mu_{YX}\cdot q_Y^1\cdot q_X^2}{4\pi r^3}\cdot\left(-r^3\cdot\dot{\nu}\cdot\bar{e}_\nu-r^3\cdot sin\nu\cdot\dot{\varphi}\cdot\bar{e}_\varphi\right).$$

$$\bar{N}=m\cdot\left[\bar{r}\times\bar{\mathrm{v}}\right]=\begin{vmatrix}\bar{e}_r & \bar{e}_\nu & \bar{e}_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\cdot\dot{\nu} & r\cdot\sin\nu\cdot\dot{\varphi}\end{vmatrix}=$$

$$=m\left(r^2\cdot\dot{\nu}\cdot\bar{e}_\varphi-r^2\cdot\sin\nu\cdot\dot{\varphi}\cdot\bar{e}_\nu\right)\ .$$

$$\left|\bar{N}\right|=\sqrt{N_\varphi^{\ 2}+N_\nu^{\ 2}}=\sqrt{\left(m\cdot r^2\cdot\dot{\nu}\right)^2+\left(-m\cdot r^2\cdot sin\nu\cdot\dot{\varphi}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{m^2\cdot r^4\cdot\left(\dot{\nu}^2+sin^2\nu\cdot\dot{\varphi}^2\right)}=\sqrt{m^2\cdot r^4\cdot\dot{\theta}^2}=m\cdot r^2\cdot\dot{\theta}\ ,$$

где $\dot{\theta}^2=\dot{\nu}^2+\sin^2\nu\cdot\dot{\varphi}^2$.

$$\left(\dot{\nu}^2+\sin^2\nu\cdot\dot{\varphi}^2\right)=\dot{\theta}^2=\frac{N^2}{m^2\cdot r^4}\ .$$

Из общих рассуждений предположим, что модуль вектора $\bar{\mathrm{N}}$

является постоянной величиной: $\left|\overline{\mathrm{N}}\right| = \mathrm{const}$, а значит и

$N^2 = \left|\overline{N}\right|^2 = const$.

Магнитное поле $-\overline{\Phi}_Y$ не совершает работы. Поэтому закон сохранения энергии:

$$E = \frac{m \cdot \mathrm{v}^2}{2} + U(r) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\nu}^2 + r^2 \cdot \sin^2 \nu \cdot \dot{\varphi}^2 \right) +$$

$$+ \sum_Y \sum_X \frac{\nu_{YX} \cdot q_Y^1 \cdot q_X^2}{4\pi \cdot r} = const \ .$$

$$E = \frac{m \cdot \mathrm{v}^2}{2} + U(r) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2 \right) + \sum_Y \sum_X \frac{\nu_{YX} \cdot q_Y^1 \cdot q_X^2}{4\pi \cdot r} \ .$$

$$\rho = \frac{1}{r} \ .$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{d\theta} \cdot \dot{\theta} =$$

$$= -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta} \cdot \frac{N}{mr^2} = -\frac{N}{m} \cdot \frac{d\rho}{d\theta} \ .$$

$$E = \frac{m \cdot \mathrm{v}^2}{2} + U(r) = \frac{m}{2} \cdot \left\{ \left(-\frac{N}{m} \cdot \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{N^2}{m^2} \cdot \rho^4 \right\} +$$

$$+ \sum_Y \sum_X \frac{\nu_{YX} \cdot q_Y^1 \cdot q_X^2}{4\pi} \cdot \rho =$$

$$= \frac{m}{2} \cdot \left\{ \frac{N^2}{m^2} \cdot \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \frac{N^2}{m^2} \cdot \rho^2 \right\} + \sum_Y \sum_X \frac{\nu_{YX} \cdot q_Y^1 \cdot q_X^2}{4\pi} \cdot \rho = const \ .$$

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2 + \sum_Y \sum_X \frac{\nu_{YX} \cdot q_Y^1 \cdot q_X^2}{4\pi} \cdot \frac{2m}{N^2} \cdot \rho = const \ .$$

Продифференцируем по θ :

$$2 \cdot \frac{d\rho}{d\theta} \cdot \frac{d^2\rho}{d\theta^2} + 2 \cdot \rho \cdot \frac{d\rho}{d\theta} + \sum_Y \sum_X \frac{\nu_{YX} \cdot q_Y^1 \cdot q_X^2}{4\pi} \cdot \frac{2m}{N^2} \cdot \frac{d\rho}{d\theta} = 0 .$$

$$2\cdot\frac{d\rho}{d\theta}\cdot\left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+\rho+\sum_Y\sum_X\frac{\nu_{YX}\cdot q_Y^1\cdot q_X^2}{4\pi}\cdot\frac{m}{N^2}\right)=0.$$

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+\rho+\sum_Y\sum_X\frac{\nu_{YX}\cdot q_Y^1\cdot q_X^2}{4\pi}\cdot\frac{m}{N^2}=0\ .$$

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2}+\rho=c\quad,\quad c=-\sum_Y\sum_X\frac{\nu_{YX}\cdot q_Y^1\cdot q_X^2}{4\pi}\cdot\frac{m}{N^2}.$$

$$\rho=c+a\cdot\cos\theta+b\cdot\sin\theta\quad;\ a,b-\textit{произвольные постоянные}.$$

$$\rho=c+a\cdot\cos\theta+b\cdot\sin\theta=$$

$$=c+\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin\theta\right)=$$

$$=c+\sqrt{a^2+b^2}\cdot(\cos\theta_0\cdot\cos\theta+\sin\theta_0\cdot\sin\theta)=$$

$$=c+\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(\theta-\theta_0)=$$

$$=c\cdot\left[1+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\cdot\cos(\theta-\theta_0)\right]=\frac{1}{P}\cdot[1+e\cdot\cos(\theta-\theta_0)]\ .$$

Здесь $P=\frac{1}{c}=\frac{-4\cdot\pi\cdot N^2}{m\cdot\sum_Y\sum_X\nu_{YX}\cdot q_Y^1\cdot q_X^2}$,

$$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\quad,\quad\cos\theta_0=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,\ \sin\theta_0=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,$$

$$\overline{N}=m\cdot[\overline{r}\times\overline{v}]=m\left(r^2\cdot\dot{\nu}\cdot\overline{e}_\varphi-r^2\cdot sin\nu\cdot\dot{\varphi}\cdot\overline{e}_\nu\right)=\overline{N}_\nu+\overline{N}_\varphi\ ,$$

$$\overline{N}_\varphi=m\cdot r^2\cdot\dot{\nu}\cdot\overline{e}_\varphi\quad,\quad N_\varphi=m\cdot r^2\cdot\dot{\nu}\ ,$$

$$\overline{N}_\nu=-m\cdot r^2\cdot sin\nu\cdot\dot{\varphi}\cdot\overline{e}_\nu\quad,\quad N_\nu=-m\cdot r^2\cdot sin\nu\cdot\dot{\varphi}\quad.$$

Положим:

1) $$N_{\varphi} = B = \sum_{Y}\sum_{X}\frac{\mu_{YX}\cdot q^{1}{}_{Y}\cdot q^{2}{}_{X}}{4\cdot\pi} \ ,$$

$$m\cdot r^{2}\cdot\dot{\nu} = B \ ,$$

$$\dot{\nu} = \frac{B}{m\cdot r^{2}} \quad .$$

2) $-N_{\nu} = L$, где $\overline{L}$ - составляющая момента импульса частицы

$$m\cdot r^{2}\cdot sin\nu\cdot\dot{\varphi} = L$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m\cdot r^{2}\cdot sin\nu} \quad .$$

3) $$\left|\overline{N}\right| = \sqrt{N_{\varphi}{}^{2} + N_{\nu}{}^{2}} = \sqrt{L^{2} + B^{2}} \quad - \quad \textit{модуль полного момента импульса} \ .$$

Окончательно:

Траектория, по которой движется частица 2 с набором зарядов $\left\{q^{2}_{X}\right\}$ в поле частицы 1 с набором зарядов $\left\{q^{1}_{Y}\right\}$ в случае их притяжения, в сферической системе координат определяется из уравнений:

$$\begin{cases} r = \dfrac{P}{1 + e\cdot cos(\theta - \theta_{0})} \\ \dot{\nu} = \dfrac{B}{m\cdot r^{2}} \\ \dot{\varphi} = \dfrac{L}{m\cdot r^{2}\cdot sin\nu} \end{cases} \quad .$$

Здесь:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\dot{\nu}^{2} + (\sin^{2}\nu)\cdot\dot{\varphi}^{2}} \ ,$$

P – параметр орбиты ,

$$P = \frac{-4\cdot\pi\cdot\left(B^2+L^2\right)}{m\cdot\sum\limits_Y\sum\limits_X \nu_{YX}\cdot q^1{}_Y\cdot q^2{}_X} \ ,$$

e- эксцентриситет $\quad e = P\cdot\sqrt{a^2+b^2}$,

$$\cos\theta_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \sin\theta_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \ ,$$

постоянные a и b опреляются из начальных условий,

B= $\sum\limits_Y\sum\limits_X \frac{\mu_{YX}\cdot q^1{}_Y\cdot q^2{}_X}{4\cdot\pi}$,

L – *начальный момент импульса частицы* 2 ,

$N = \sqrt{N_\nu{}^2 + N_\varphi{}^2} = \sqrt{L^2+B^2}$ – *полный момент импульса частицы* 2 ,

N, L, B – константы ,

m – масса частицы 2 .

В случае притяжения $(P > 0)$ частица движется по эллипсу, плоскость которого сама совершает движение.

§ 11 Аналоги уравнений Даламбера.

Каждому полю $\overline{Y}$ из набора полей $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \cdots, \overline{X}_n$ поставлен в соответствие тензор

$$F_{Yik} = \left(\overline{Y}, -c\cdot\overline{\Phi}_Y\right) .$$

Каждому полю $\overline{Y}$ поставим в соответствие 4-потенциал $A_{Yi} = \left(\varphi_Y, c\cdot\overline{A}_Y\right)$, где φ_Y и $\overline{A}_Y$ удовлетворяют условию Лоренца : $\quad div\overline{A}_Y + \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varphi_Y = 0$.

Докажем, что скалярный и векторный потенциалы удовлетворяют уравнениям, аналогичным уравнениям Даламбера.

Напряженности полей выражаются через 4 вектор-потенциалы

$$\overline{Y} = \sum_L \lambda_{YL} \cdot (\frac{\partial}{\partial t}\overline{A}_L + grad\varphi_L) + rot\,\overline{A}_Y \ .$$

1. Одно из уравнений единого поля:

$$rot\,\overline{Y} = \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{L}}{\partial t} + \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L \ .$$

$$rot\left(\sum_L \lambda_{YL} \cdot (\frac{\partial}{\partial t}\overline{A}_L + grad\varphi_L) + rot\,\overline{A}_Y\right) =$$

$$= \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_N \lambda_{LN} \cdot (\frac{\partial}{\partial t}\overline{A}_N + grad\varphi_N) + rot\,\overline{A}_L\right) + \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L \ .$$

$$\sum_L \lambda_{YL} \cdot (rot\frac{\partial}{\partial t}\overline{A}_L + rot\ grad\varphi_L) + rot\,rot\overline{A}_Y =$$

$$= \sum_L \lambda_{YL} \sum_N \lambda_{LN} \cdot (\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{A}_N + \frac{\partial}{\partial t} grad\varphi_N) + \sum_L \lambda_{YL} rot\frac{\partial}{\partial t}\ \overline{A}_L + \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L \ .$$

$$\sum_L \lambda_{YL} \cdot rot\frac{\partial}{\partial t}\overline{A}_L \ + rot\,rot\overline{A}_Y =$$

$$= -\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{A}_Y + \frac{\partial}{\partial t} grad\varphi_Y\right) + \sum_L \lambda_{YL} rot\frac{\partial}{\partial t}\ \overline{A}_L + \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L \ .$$

$$rot\,rot\overline{A}_Y = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{A}_Y - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} grad\,\varphi_Y + \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L \ .$$

$$grad\,div\,\overline{A}_Y - \nabla^2\overline{A}_Y = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{A}_Y - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} grad\,\varphi_Y + \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L \ .$$

Из условия Лоренца $div\overline{A}_Y + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\varphi_Y = 0$ получим

$$div\overline{A}_Y = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\varphi_Y \ .$$

Тогда:

$$grad\left(-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varphi_Y\right)-\nabla^2\overline{A}_Y=$$

$$=-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{A}_Y-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}grad\varphi_Y+\sum_L\mu_{YL}\cdot\overline{j}_L\ ,$$

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{A}_Y-\nabla^2\overline{A}_Y=\sum_L\mu_{YL}\cdot\overline{j}_L\ .$$

2. Одно из уравнений единого поля:

$$div\overline{Y}=\sum_L\nu_{YL}\cdot\rho_L\ .$$

$$div\left(\sum_L\lambda_{YL}\cdot(\frac{\partial}{\partial t}\overline{A}_L+grad\varphi_L)+rot\overline{A}_Y\right)=\sum_L\nu_{YL}\cdot\rho_L\ .$$

$$\sum_L\lambda_{YL}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(div\overline{A}_L\right)+\sum_L\lambda_{YL}\cdot div\,grad\,\varphi_L+div\,rot\overline{A}_Y=\sum_L\nu_{YL}\cdot\rho_L\ .$$

Учтем, что

$$div\,grad\,\varphi_L=\nabla^2\varphi_L\ ,\ div\,rot\,\overline{A}_L=0\ ,\ div\overline{A}_Y+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varphi_Y=0\ .$$

$$\sum_L\lambda_{YL}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(div\overline{A}_L\right)+\sum_L\lambda_{YL}\cdot\nabla^2\varphi_L=\sum_L\nu_{YL}\cdot\rho_L\ .$$

$$-\frac{1}{c^2}\cdot\sum_L\lambda_{YL}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi_L+\sum_L\lambda_{YL}\cdot\nabla^2\varphi_L=\sum_L\nu_{YL}\cdot\rho_L\ .$$

$$\sum_L\lambda_{YL}\cdot\left(\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi_L-\nabla^2\varphi_L\right)=-\sum_L\nu_{YL}\cdot\rho_L\ .$$

В матричной записи

$$(\lambda)\cdot\left(\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\cdot\{\varphi\}=-(\nu)\cdot\{\rho\}.$$

Умножим последнее уравнение слева на (λ):

$$(\lambda)\cdot(\lambda)\cdot\left(\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\cdot\{\varphi\}=-(\lambda)\cdot(\nu)\cdot\{\rho\}.$$

Учтем $(\lambda)\cdot(\lambda)=-\dfrac{1}{c^2}$, $(\lambda)\cdot(\nu)=(\mu).$

Тогда :

$$-\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\cdot\{\varphi\}=-(\mu)\cdot\{\rho\}$$

$$-\frac{1}{c^4}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cdot\{\varphi\}+\frac{1}{c^2}\nabla^2\{\varphi\}=-(\mu)\cdot\{\rho\}$$

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cdot\{\varphi\}-\nabla^2\{\varphi\}=c^2\cdot(\mu)\cdot\{\rho\}$$

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi_L-\nabla^2\varphi_L=c^2\cdot\sum_L\mu_{YL}\cdot\rho_L\ .$$

Таким образом, получены аналоги уравнений Даламбера для единой теории:

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{A}_Y-\nabla^2\overline{A}_Y=\sum_L\mu_{YL}\cdot\overline{j}_L$$

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi_L-\nabla^2\varphi_L=c^2\cdot\sum_L\mu_{YL}\cdot\rho_L$$

или

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{A}_Y-\nabla^2\overline{A}_Y=\sum_L\mu_{YL}\cdot\overline{j}_L$$

$$\sum_L\lambda_{YL}\cdot\left(\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi_L-\nabla^2\varphi_L\right)=-\sum_L\nu_{YL}\cdot\rho_L\ .$$

Решения этих уравнений известны:

$$\overline{A}(\overline{r},t)=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\int\frac{\sum_L\mu_{YL}\cdot\overline{j}_L\left(\overline{r}',t-\frac{|\overline{r}-\overline{r}'|}{c}\right)}{|\overline{r}-\overline{r}'|}\cdot dV'$$

$$\varphi(\bar{r},t)=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\int\frac{c^2\cdot\sum\limits_L \mu_{YL}\cdot\rho_L\left(\bar{r}',t-\frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{c}\right)}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\cdot dV' \ .$$

§ 12 Поле вращающегося шара.

I. Найдем поля создаваемые вращающейся с угловой скоростью $\bar{\omega}$ равномерно заряженной сферой, имеющей радиус R и набор зарядов {q} .

$$\bar{Y}=\sum_L \lambda_{YL}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\bar{A}_L+grad\varphi_L\right)+rot\bar{A}_Y \quad .$$

Уравнения Даламбера для единого векторного поля:

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A}_Y-\nabla^2\bar{A}_Y=\sum_L \mu_{YL}\cdot\bar{j}_L$$

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi_L-\nabla^2\varphi_L=c^2\cdot\sum_L \mu_{YL}\cdot\rho_L \quad .$$

Решения этих уравнений:

$$\bar{A}(\bar{r},t)=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\int\frac{\sum\limits_L \mu_{YL}\cdot\bar{j}_L\left(\bar{r}',t-\frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{c}\right)}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\cdot dV'$$

$$\varphi(\bar{r},t)=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\int\frac{c^2\cdot\sum\limits_L \mu_{YL}\cdot\rho_L\left(\bar{r}',t-\frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{c}\right)}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\cdot dV' .$$

a) $$\varphi_Y(\bar{r},t)=\sum_L \frac{c^2\cdot\mu_{YL}\cdot q_L}{4\pi}\cdot\frac{1}{r}$$

$$grad\varphi_L = grad\sum_L \frac{c^2\cdot\mu_{YL}\cdot q_L}{4\pi}\cdot\frac{1}{r}=\sum_L \frac{c^2\cdot\mu_{YL}\cdot q_L}{4\pi}\cdot grad\frac{1}{r}=$$
$$=\sum_L \frac{-c^2\cdot\mu_{YL}\cdot q_L}{4\pi}\cdot\frac{\bar{r}}{r^3}\ .$$

b) $$\bar{A}_Y(\bar{r},t)=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\int\frac{\sum_L \mu_{YL}\cdot\bar{j}_L\left(\bar{r}',t-\frac{|\bar{r}-\bar{r}'|}{c}\right)}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\cdot dV'=$$

= / $\sigma_L=\dfrac{q_L}{4\cdot\pi\cdot R^2}$ - поверхностная плотность заряда q_L

При вращении сферы токи будут поверхностными

$\bar{j}\cdot dV'\to\sigma\cdot R\cdot\bar{\omega}\times d\bar{S}'$ (см. [7]),

где $d\bar{S}-$ вектор, по модулю равный площади элементарной площадки и направленный перпендикулярно этой площадке. / =

$$=\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\sum_L \mu_{YL}\cdot\sigma_L\cdot R\cdot\left(\bar{\omega}\times\oint\frac{d\bar{S}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\right)=$$

= / Воспользуемся теоремой о градиенте

$$\int_{V'} grad_{r'}\Phi(\bar{r}')dV'=\int_{S'} d\bar{S}'\cdot\Phi(\bar{r}')$$ / =

$$=\quad\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\sum_L \mu_{YL}\cdot\sigma_L\cdot R\cdot\bar{\omega}\times\int_{V'} grad_{r'}\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|}dV'=$$

= / $grad_r\dfrac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|}=-grad_{r'}\dfrac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$ / =

$$=-\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\sum_L \mu_{YL}\cdot\sigma_L\cdot R\cdot\left(\overline{\omega}\times grad\int_{V'}\frac{1}{\left|\overline{r}-\overline{r'}\right|^3}dV'\right)=$$

$$=-\frac{1}{4\cdot\pi}\cdot\sum_L \mu_{YL}\cdot\sigma_L\cdot R\cdot\left[\ \overline{\omega}\times grad\,\frac{4\cdot\pi\cdot R^3}{3}\cdot\frac{1}{r}\ \right]=$$

$$=-\sum_L\frac{\mu_{YL}\cdot\sigma_L\cdot R^4}{3}\cdot\overline{\omega}\times\left(-\frac{\overline{r}}{r^3}\right)=\sum_L\frac{\mu_{YL}\cdot\sigma_L\cdot R^4}{3}\cdot\frac{\overline{\omega}\times\overline{r}}{r^3}=$$

$$=\sum_L\frac{\mu_{YL}\cdot\dfrac{q_L}{4\pi\cdot R^2}\cdot R^4}{3}\cdot\frac{\overline{\omega}\times\overline{r}}{r^3}=\sum_L\frac{\mu_{YL}\cdot q_L\cdot R^2}{12\pi}\cdot\frac{\overline{\omega}\times\overline{r}}{r^3}\ .$$

Окончательно:

$$\overline{A}_Y(\overline{r},t)=\sum_L\frac{\mu_{YL}\cdot q_L\cdot R^2}{12\pi}\cdot\frac{\overline{\omega}\times\overline{r}}{r^3}\ .$$

$$rot\,\overline{A}_Y(\overline{r},t)=\sum_L\frac{\mu_{YL}\cdot q_L\cdot R^2}{12\pi}\cdot rot\,\frac{\overline{\omega}\times\overline{r}}{r^3}=$$

$$=\sum_L\frac{\mu_{YL}\cdot q_L\cdot R^2}{12\pi}\cdot\left(\ \frac{rot\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right)}{r^3}+grad\left(\frac{1}{r^3}\right)\times\left[\overline{\omega}\times\overline{r}\right]\ \right)=$$

$$=\sum_L\frac{\mu_{YL}\cdot q_L\cdot R^2}{12\pi}\cdot\left(\ \frac{2\cdot\overline{\omega}}{r^3}-\frac{3\cdot\overline{r}\times\left[\overline{\omega}\times\overline{r}\right]}{r^5}\ \right)\ .$$

Напряженности полей, создаваемые сферой:

$$\overline{Y}=\sum_L\lambda_{YL}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\overline{A}_L+grad\varphi_L\right)+rot\overline{A}_Y=$$

$$=\ /\ \overline{A}_Y\ \text{независим от}\ t\ /\ =\sum_L\lambda_{YL}\cdot grad\varphi_L+rot\overline{A}_Y=$$

$$=\sum_L\lambda_{YL}\cdot\sum_N\frac{-c^2\cdot\mu_{LN}\cdot q_N}{4\pi}\cdot\frac{\overline{r}}{r^3}+\sum_L\frac{\mu_{YL}\cdot q_L\cdot R^2}{12\pi}\cdot rot\,\frac{\overline{\omega}\times\overline{r}}{r^3}=$$

$$=\ /\ (\lambda)\cdot(\mu)=-\frac{1}{c^2}\cdot(\nu)\quad\Rightarrow\quad c^2\cdot(\lambda)\cdot(\mu)=-(\nu)\ /\ =$$

$$= \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L}{4\pi} \cdot \frac{\bar{r}}{r^3} + \sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot q_L \cdot R^2}{12\pi} \cdot rot \frac{\bar{\omega} \times \bar{r}}{r^3} \ .$$

II. Найдем поля, создаваемые вращающимся с угловой скоростью $\bar{\omega}$ равномерно заряженным шаром, имеющим радиус R и набор зарядов {q} .
Плотность заряда шара

$$\rho_L = \frac{q_L}{V} = \frac{q_L}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{q_L}{\pi \cdot R^3} \ .$$

Разобьем шар на бесконечное число сферически слоев.
Каждый такой сферический слой радиуса a имеет заряд

$$dq_L = 4 \cdot \pi \cdot \rho_L \cdot a^2 \cdot da = 4 \cdot \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{q_L}{\pi \cdot R^3} \cdot a^2 \cdot da = \frac{3 \cdot q_L}{R^3} \cdot a^2 \cdot da \ .$$

Используя результат задачи I, напишем вклад $d\bar{Y}$, который дает каждый сферический слой в напряженность поля $\bar{Y}$:

$$d\bar{Y} = d\left\{ \sum_L \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{A}_L + grad\,\varphi_L \right) + rot\,\bar{A}_Y \right\} =$$

$$= \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot dq_L(a)}{4\pi} \cdot \frac{\bar{r}}{r^3} + \sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot a^2 \cdot dq_L(a)}{12\pi} \cdot rot \frac{\bar{\omega} \times \bar{r}}{r^3} =$$

$$= \sum_L \frac{\nu_{YL}}{4\pi} \cdot \frac{\bar{r}}{r^3} \cdot dq_L(a) + \sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot a^2}{12\pi} \cdot rot \frac{\bar{\omega} \times \bar{r}}{r^3} \cdot dq_L(a) \ .$$

$$\bar{Y} = \int_0^R d\bar{Y} = \int_0^R \sum_L \frac{\nu_{YL}}{4\pi} \cdot \frac{\bar{r}}{r^3} \cdot \frac{3 \cdot q_L \cdot a^2}{R^3} \cdot da +$$

$$+ \int_0^R \sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot a^2}{12\pi} \cdot rot \frac{\bar{\omega} \times \bar{r}}{r^3} \cdot \frac{3 \cdot q_L \cdot a^2}{R^3} \cdot da =$$

$$=\sum_L \frac{\nu_{YL}}{4\pi}\cdot\frac{\bar r}{r^3}\cdot\frac{3\cdot q_L}{R^3}\int_0^R a^2\cdot da+\sum_L \frac{\mu_{YL}}{12\pi}\cdot rot\,\frac{\bar\omega\times\bar r}{r^3}\cdot\frac{3\cdot q_L}{R^3}\int_0^R a^4\cdot da=$$

$$=\sum_L \frac{\nu_{YL}}{4\pi}\cdot\frac{\bar r}{r^3}\cdot\frac{3\cdot q_L}{R^3}\cdot\frac{R^3}{3}+\sum_L \frac{\mu_{YL}}{12\pi}\cdot rot\,\frac{\bar\omega\times\bar r}{r^3}\cdot\frac{3\cdot q_L}{R^3}\cdot\frac{R^5}{5}=$$

$$=\sum_L \frac{\nu_{YL}\cdot q_L}{4\pi}\cdot\frac{\bar r}{r^3}+\sum_L \frac{\mu_{YL}\cdot q_L\cdot R^2}{20\pi}\cdot rot\,\frac{\bar\omega\times\bar r}{r^3}\ .$$

Поля, создаваемые вращающимся шаром

$$\bar Y=\sum_L \frac{\nu_{YL}\cdot q_L}{4\pi}\cdot\frac{\bar r}{r^3}+\sum_L \frac{\mu_{YL}\cdot q_L\cdot R^2}{20\pi}\cdot rot\,\frac{\bar\omega\times\bar r}{r^3}\ .$$

$$-\Phi_Y=-\sum_L \lambda_{YL}\cdot\bar L=/\ (\lambda)\cdot(\nu)=(\mu)\quad(\lambda)\cdot(\mu)=-\frac{1}{c^2}\cdot(\nu)/=$$

$$=-\sum_L \frac{\mu_{YL}\cdot q_L}{4\pi}\cdot\frac{\bar r}{r^3}+\sum_L \frac{\nu_{YL}\cdot q_L\cdot R^2}{20\pi\cdot c^2}\cdot rot\,\frac{\bar\omega\times\bar r}{r^3}\ .$$

$$rot\,\frac{\bar\omega\times\bar r}{r^3}=\frac{1}{r^3}\cdot\left(2\cdot\bar\omega-\frac{3\cdot\bar r\times\left[\bar\omega\times\bar r\right]}{r^2}\right).$$

На оси вращающегося шара $\bar\omega$ и $\bar r$ параллельны.

Поэтому $\left[\bar\omega\times\bar r\right]=\bar 0$ и $rot\,\frac{\bar\omega\times\bar r}{r^3}=\frac{2\cdot\bar\omega}{r^3}$.

$$\bar Y=\sum_L \frac{\nu_{YL}\cdot q_L}{4\pi}\cdot\frac{\bar r}{r^3}+\sum_L \frac{\mu_{YL}\cdot q_L\cdot R^2}{20\pi}\cdot\frac{2\cdot\bar\omega}{r^3}=$$

$$=\sum_L \frac{\nu_{YL}\cdot q_L}{4\pi}\cdot\frac{\bar r}{r^3}+\sum_L \frac{\mu_{YL}\cdot q_L\cdot R^2}{10\pi}\cdot\frac{\bar\omega}{r^3}\ .$$

$$-\bar\Phi_Y=-\sum_L \lambda_{YL}\cdot\bar L=$$

$$=-\sum_L \frac{\mu_{YL}\cdot q_L}{4\pi}\cdot\frac{\bar r}{r^3}+\sum_L \frac{\nu_{YL}\cdot q_L\cdot R^2}{10\pi\cdot c^2}\cdot\frac{\bar\omega}{r^3}\ .$$

На оси $\bar\omega\ \uparrow\uparrow\ \bar r$ *или* $\bar\omega\ \uparrow\downarrow\ \bar r$.

На северном географическом полюсе $\overline{\omega} \uparrow\uparrow \overline{r}$ и $r = R$.

$$Y = \left| \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2} + \sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot q_L}{10\pi} \cdot \frac{\omega}{R} \right| .$$

$$\left| -\overline{\Phi}_Y \right| = \left| \sum_L \frac{-\mu_{YL} \cdot q_L}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2} + \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L}{10\pi \cdot c^2} \cdot \frac{\omega}{R} \right| .$$

На южном географическом полюсе $\overline{\omega} \uparrow\downarrow \overline{r}$ и $r = R$.

$$Y = \left| -\sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2} + \sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot q_L}{10\pi} \cdot \frac{\omega}{R} \right| .$$

$$\left| -\overline{\Phi}_Y \right| = \left| \sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot q_L}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^2} + \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L}{10\pi \cdot c^2} \cdot \frac{\omega}{R} \right| .$$

Таким образом, на северном и южном географических полюсах напряженности полей различны.

§ 13 Тензоры поля. Уравнения поля, записанные с помощью тензоров.

Уравнения поля:

$$div\overline{Y} = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L$$

$$rot\,\overline{Y} = \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{L}}{\partial t} .$$

Введем в рассмотрение антисимметричные тензоры поля F_{Yik} , которые представляют собой бивекторы.

$$F_{Yik} = \left(\overline{Y}, -c \cdot \overline{\Phi}_Y\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & Y_x & Y_y & Y_z \\ -Y_x & 0 & -c \cdot \left(-\Phi_{Y\,z}\right) & c \cdot \left(-\Phi_{Y\,y}\right) \\ -Y_y & c \cdot \left(-\Phi_Y\right)_z & 0 & -c \cdot \left(-\Phi_{Y\,x}\right) \\ -Y_z & -c \cdot \left(-\Phi_{Y\,y}\right) & c \cdot \left(-\Phi_{Y\,x}\right) & 0 \end{pmatrix} .$$

$$F_Y{}^{ik} = \left(-\overline{Y}, -c\cdot\overline{\Phi}_Y\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -Y_x & -Y_y & -Y_z \\ Y_x & 0 & -c\cdot\left(-\Phi_{Y\,z}\right) & c\cdot\left(-\Phi_{Y\,y}\right) \\ Y_y & c\cdot\left(-\Phi_{Y\,z}\right) & 0 & -c\cdot\left(-\Phi_{Y\,x}\right) \\ Y_z & -c\cdot\left(-\Phi_{Y\,y}\right) & c\cdot\left(-\Phi_{Y\,x}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тем самым каждому полю $\overline{Y}$ из набора полей $X_1, X_2, \ldots, X_n$ поставлены в соответствие тензоры F_{Yik} *и* $F_Y{}^{ik}$.

Дуальные псевдотензоры:

$$F^*{}_Y{}^{ik} = \left(c\cdot\overline{\Phi}_Y, -\overline{Y}\right) = \begin{pmatrix} 0 & c\cdot\Phi_{Y\,x} & c\cdot\Phi_{Y\,y} & c\cdot\Phi_{Y\,z} \\ -c\cdot\Phi_{Y\,x} & 0 & -\left(-Y_z\right) & -Y_y \\ -c\cdot\Phi_{Y\,y} & -Y_z & 0 & -\left(-Y_x\right) \\ -c\cdot\Phi_{Y\,z} & -\left(-Y_y\right) & -Y_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^*{}_{Yik} = \left(-c\cdot\overline{\Phi}_Y, -\overline{Y}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -c\cdot\Phi_{Y\,x} & -c\cdot\Phi_{Y\,y} & -c\cdot\Phi_{Y\,z} \\ c\cdot\Phi_{Y\,x} & 0 & Y_z & -Y_y \\ c\cdot\Phi_{Y\,y} & -Y_z & 0 & Y_x \\ c\cdot\Phi_{Y\,z} & Y_y & -Y_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения поля можно выразить через тензоры F_{Yik} следующим образом :

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} F_Y{}^{ik} = -\frac{1}{c}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot j_L{}^i$$

$$\sum_k \frac{\partial F_Y{}^{*ik}}{\partial x^k} = \sum_L \mu_{YL}\cdot j_L{}^i \quad .$$

Также справедливы соотношения:

$$\sum_k \frac{\partial F^*_{Y\,ik}}{\partial x_k} = \sum_L \mu_{YL} \cdot j_{L\,i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^l} F_Y{}^{ik} + \frac{\partial}{\partial x^i} F_Y{}^{kl} + \frac{\partial}{\partial x^k} F_Y{}^{li} = e^{iklm} \cdot \sum_L \mu_{YL} \cdot j_{L\,m} \ ,$$

где e^{iklm} – антисимметричный единичный 4тензор ,

$$\{j^i\} = \begin{Bmatrix} j_{X_1}{}^i \\ \cdots \\ j_{X_n}{}^i \end{Bmatrix}$$ - 4 – векторы плотности токов ,

$$\{F^{ik}\} = \begin{Bmatrix} F_{X_1}{}^{ik} \\ \cdots \\ F_{X_n}{}^{ik} \end{Bmatrix}$$ - тензоры поля .

I Проверим $\sum_k \frac{\partial}{\partial x^k}\{F^{ik}\} = -\frac{1}{c}(\nu)\cdot\{j^i\}$.

а) i=0

$$\frac{\partial F_Y{}^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_Y{}^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_Y{}^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_Y{}^{03}}{\partial x^3} = -\frac{1}{c}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot j_L{}^0$$

$$0 - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} = -\frac{1}{c}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot c\cdot\rho_L$$

$$-div\overline{Y} = -\sum_L \nu_{YL}\cdot\rho_L$$

$$div\overline{Y} = \sum_L \nu_{YL}\cdot\rho_L \ .$$

б) i=1

$$\frac{\partial F_Y{}^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_Y{}^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_Y{}^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_Y{}^{13}}{\partial x^3} = -\frac{1}{c}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot j_L{}^1$$

$$\frac{\partial Y_x}{c\cdot\partial t} + 0 - \frac{c\cdot\partial(-\Phi_z)}{\partial y} + \frac{c\cdot\partial(-\Phi_y)}{\partial z} = -\frac{1}{c}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot j_{L\,x}$$

$$\frac{\partial \Phi_{Y\,z}}{\partial y}-\frac{\partial \Phi_{Y\,y}}{\partial z}=-\frac{1}{c^2}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot j_x-\frac{1}{c^2}\frac{\partial Y_x}{\partial t}$$

$$rot_x\overline{\Phi}_Y=-\frac{1}{c^2}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot j_x-\frac{1}{c^2}\frac{\partial Y_x}{\partial t}\ .$$

в) i=2

$$\frac{\partial F_Y{}^{20}}{\partial x^0}+\frac{\partial F_Y{}^{21}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_Y{}^{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_Y{}^{23}}{\partial x^3}=-\frac{1}{c}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot j_L{}^2$$

$$\frac{\partial Y_y}{c\cdot\partial t}+\frac{c\cdot\partial\left(-\Phi_z\right)}{\partial x}+0-\frac{c\cdot\partial\left(-\Phi_x\right)}{\partial z}=-\frac{1}{c}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot j_{L\,y}$$

$$-\frac{\partial \Phi_{Y\,z}}{\partial y}+\frac{\partial \Phi_{Y\,x}}{\partial z}=-\frac{1}{c^2}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot j_{L\,y}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial Y_y}{\partial t}$$

$$rot_y\overline{\Phi}_Y=-\frac{1}{c^2}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot j_y-\frac{1}{c^2}\frac{\partial Y_y}{\partial t}\ .$$

г) i=3

$$\frac{\partial F_Y{}^{30}}{\partial x^0}+\frac{\partial F_Y{}^{31}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_Y{}^{32}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_Y{}^{33}}{\partial x^3}=-\frac{1}{c}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot j_L{}^3$$

$$\frac{\partial Y_z}{c\cdot\partial t}-\frac{c\cdot\partial\left(-\Phi_{Y\,y}\right)}{\partial x}+\frac{c\cdot\partial\left(-\Phi_{Y\,x}\right)}{\partial y}+0=-\frac{1}{c}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot j_{Lz}$$

$$\frac{\partial \Phi_y}{\partial x}-\frac{\partial \Phi_x}{\partial y}=-\frac{1}{c^2}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot j_{L\,z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial Y_z}{\partial t}$$

$$rot_z\overline{\Phi}_Y=-\frac{1}{c^2}\cdot\sum_L \nu_{YL}\cdot j_{L\,z}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial Y_z}{\partial t}\ .$$

д) Таким образом

$$\sum_k\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{F^{ik}\right\}=-\frac{1}{c}\left(\nu\right)\cdot\left\{j^i\right\}\qquad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} div\overline{Y} = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L & ; \quad i = 0 \\ rot\,\overline{\Phi}_Y = -\frac{1}{c^2} \cdot \sum_L \nu_{YL} \cdot \overline{j}_L - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \overline{Y}}{\partial t} & ; i = 1,2,3 \end{cases} .$$

Последнее уравнение

$$rot\,\overline{\Phi}_Y = -\frac{1}{c^2} \cdot \sum_L \nu_{YL} \cdot \overline{j} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \overline{Y}}{\partial t} \Leftrightarrow rot\overline{Y} = \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L + \frac{\partial}{\partial t} \overline{\Phi}_Y \ .$$

II. Проверим $\sum_k \frac{\partial F_Y^{*ik}}{\partial x^k} = \sum_L \mu_{YL} \cdot j_L^{\ i}$.

а) i=0

$$\frac{\partial F_Y^{*00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_Y^{*01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_Y^{*02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_Y^{*03}}{\partial x^3} = \sum_L \mu_{YL} \cdot j_L^{\ 0}$$

$$0 + c\frac{\partial \Phi_{Y\,x}}{\partial x} + c\frac{\partial \Phi_{Y\,y}}{\partial y} + c\frac{\partial \Phi_{Y\,z}}{\partial z} = \sum_L \mu_{YL} \cdot c \cdot \rho_L$$

$$div\overline{\Phi}_Y = \sum_L \mu_{YL} \cdot \rho_L \quad .$$

б) i=1

$$\frac{\partial F_Y^{*10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_Y^{*11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_Y^{*12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_Y^{*13}}{\partial x^3} = \sum_L \mu_{YL} \cdot j_L^{\ 1}$$

$$-\mathrm{c} \cdot \frac{\partial \Phi_x}{\mathrm{c} \cdot \partial t} + 0 + \frac{\partial Y_z}{\partial y} - \frac{\partial Y_y}{\partial z} = \sum_L \mu_{YL} \cdot j_{L\,x}$$

$$\frac{\partial Y_z}{\partial y} - \frac{\partial Y_y}{\partial z} = \sum_L \mu_{YL} \cdot j_{L\,x} + \frac{\partial \Phi_{Y\,x}}{\partial t}$$

$$rot_x\overline{Y} = \sum_L \mu_{YL} \cdot j_{L\,x} + \frac{\partial \Phi_{Y\,x}}{\partial t} \quad .$$

в) i=2

$$\frac{\partial F_Y^{*20}}{\partial x^0}+\frac{\partial F_Y^{*21}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_Y^{*22}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_Y^{*23}}{\partial x^3}=\sum_L \mu_{YL}\cdot j_L{}^2$$

$$-c\cdot\frac{\partial \Phi_y}{c\cdot\partial t}-\frac{\partial Y_z}{\partial x}+0+\frac{\partial Y_x}{\partial z}=\sum_L \mu_{YL}\cdot j_{L\,y}$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial z}-\frac{\partial Y_z}{\partial x}=\sum_L \mu_{YL}\cdot j_{L\,y}+\frac{\partial \Phi_{Y\,y}}{\partial t}$$

$$rot_y\overline{Y}=\sum_L \mu_{YL}\cdot j_{L\,y}+\frac{\partial \Phi_{Y\,y}}{\partial t}\quad .$$

г) i=3

$$\frac{\partial F_Y^{*30}}{\partial x^0}+\frac{\partial F_Y^{*31}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_Y^{*32}}{\partial x^2}+\frac{\partial F_Y^{*33}}{\partial x^3}=\sum_L \mu_{YL}\cdot j_L{}^3$$

$$-c\cdot\frac{\partial \Phi_z}{c\cdot\partial t}+\frac{\partial Y_y}{\partial x}-\frac{\partial Y_x}{\partial y}+0=\sum_L \mu_{YL}\cdot j_{L\,z}$$

$$\frac{\partial Y_y}{\partial x}-\frac{\partial Y_x}{\partial y}=\sum_L \mu_{YL}\cdot j_{L\,z}+\frac{\partial \Phi_{Y\,z}}{\partial t}$$

$$rot_z\overline{Y}=\sum_L \mu_{YL}\cdot j_{L\,z}+\frac{\partial \Phi_{Y\,z}}{\partial t}\quad .$$

д) Таким образом:

$$\sum_k\frac{\partial F_Y^{*ik}}{\partial x^k}=\sum_L \mu_{YL}\cdot j_L{}^i \Leftrightarrow \begin{cases} div\overline{\Phi}_Y=\sum_L \mu_{YL}\cdot\rho_L & ;\quad i=0\\ rot\overline{Y}=\sum_L \mu_{YL}\cdot\overline{j}_L+\frac{\partial \Phi_Y}{\partial t} & ;\, i=1,2,3\end{cases}$$

III. Проверим равенство $\sum_k\frac{\partial F^{*}_{Y\,ik}}{\partial x_k}=\sum_L \mu_{YL}\cdot j_{L\,i}$.

Применяя правило поднятие или опускания индексов к пунктам II.а, II.б, II.в, II.г , убеждаемся в верности этого равенства.

IV. Проверим равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_l} F_Y^{\ ik} + \frac{\partial}{\partial x_i} F_Y^{\ kl} + \frac{\partial}{\partial x_k} F_Y^{\ li} = e^{iklm} \cdot \sum_L \mu_{YL} \cdot j_{L\,m} \ .$$

а) i=0 k=1 l=3 $\Rightarrow$ $e^{013m} = 0$ *при* $m \neq 2$.

$$\frac{\partial}{\partial x_3} F_Y^{\ 01} + \frac{\partial}{\partial x_0} F_Y^{\ 13} + \frac{\partial}{\partial x_1} F_Y^{\ 30} = e^{0132} \cdot \sum_L \mu_{YL} \cdot j_{L\,2}$$

$$0132 \to 0123 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{0132} = -1$$

$$\frac{\partial}{-\partial z}(-Y_x) + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(-c \cdot \Phi_{Y\,y}\right) + \frac{\partial}{-\partial x} Y_z = -\sum_L \mu_{YL} \cdot \left(-j_{L\,y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}} \mathrm{Y_x} - \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \mathrm{Y_z} = \sum_{\mathrm{L}} \mu_{\mathrm{YL}} \cdot \mathrm{j_{L\,y}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \Phi_{\mathrm{Y\,y}}$$

$$\mathrm{rot_y}\, \overline{\mathrm{Y}} = \sum_{\mathrm{L}} \mu_{\mathrm{YL}} \cdot \mathrm{j_{L\,y}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \Phi_{\mathrm{Y\,y}} \ .$$

б) i=0 k=2 l=3 $\Rightarrow$ $e^{023m} = 0$ *при* $m \neq 1$.

$$\frac{\partial}{\partial x_3} F_Y^{\ 02} + \frac{\partial}{\partial x_0} F_Y^{\ 23} + \frac{\partial}{\partial x_2} F_Y^{\ 30} = e^{0231} \cdot \sum_L \mu_{YL} \cdot j_{L\,1}$$

$$0231 \to 0213 \to 0123 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{0231} = 1$$

$$\frac{\partial}{-\partial z}(-Y_y) + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(c \cdot \Phi_{Y\,x}\right) + \frac{\partial}{-\partial y} Y_z = +\sum_L \mu_{YL} \cdot \left(-j_{L\,x}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial y} Y_z - \frac{\partial}{\partial z} Y_y\right) = -\sum_L \mu_{YL} \cdot j_{L\,x} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi_{Y\,x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} Y_z - \frac{\partial}{\partial z} Y_y = \sum_L \mu_{YL} \cdot j_{L\,x} + \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{Y\,x}$$

$$rot_x \overline{Y} = \sum_L \mu_{YL} \cdot j_{L\,x} + \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{Y\,x} \ .$$

в) i=0 k=2 l=1 $\Rightarrow$ $e^{021m} = 0$ *при* $m \neq 3$.

$$\frac{\partial}{\partial x_1}F_Y{}^{02}+\frac{\partial}{\partial x_0}F_Y{}^{21}+\frac{\partial}{\partial x_2}F_Y{}^{10}=e^{0213}\cdot\sum_L\mu_{YL}\cdot j_{L3}$$

$$0213\to 0123 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{0213}=-1$$

$$\frac{\partial}{-\partial x}\left(-Y_y\right)+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(-c\cdot\Phi_{Y\,z}\right)+\frac{\partial}{-\partial y}Y_x=-\sum_L\mu_{YL}\cdot\left(-j_{L\,z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}Y_y-\frac{\partial}{\partial y}Y_x=\sum_L\mu_{YL}\cdot j_{L\,z}+\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{Y\,z}$$

$$rot_z\overline{Y}=\sum_L\mu_{YL}\cdot j_{L\,z}+\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{Y\,z}\ .$$

г) i=1 k=2 l=3 $\Rightarrow$ $e^{123m}=0$ *при* $m\neq 0$.

$$\frac{\partial}{\partial x_3}F_Y{}^{12}+\frac{\partial}{\partial x_1}F_Y{}^{23}+\frac{\partial}{\partial x_2}F_Y{}^{32}=e^{1230}\cdot\sum_L\mu_{YL}\cdot j_{L0}$$

$$1230\to 1203\to 1023\to 0123 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{1230}=\left(-1\right)^3=-1$$

$$c\cdot\frac{\partial}{-\partial z}\Phi_{Y\,z}+c\cdot\frac{\partial}{-\partial x}\Phi_{Y\,x}+c\cdot\frac{\partial}{-\partial y}\Phi_{Yy}=-\sum_L\mu_{YL}\cdot c\cdot\rho_L$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{Y\,x}+\frac{\partial}{\partial y}\Phi_{Yy}+\frac{\partial}{\partial z}\Phi_{Y\,z}\right)=-\sum_L\mu_{YL}\cdot\rho_L$$

$$-div\,\overline{\Phi}_Y=-\sum_L\mu_{YL}\cdot\rho_L$$

$$div\,\overline{\Phi}_Y=\sum_L\mu_{YL}\cdot\rho_L\ .$$

§ 14 Действие для поля.

Определим действие поля, как

$$S_f=\int\sum_Y a\cdot T_{Y\,ik}\cdot T_Y{}^{ik}d\Omega \quad,\quad d\Omega=dx\cdot dy\cdot dz\cdot c\cdot dt\ .$$

$$F_{Y\,ik}=-\sum_L\lambda_{YL}\cdot\left(\frac{\partial A_{Lk}}{\partial x^i}-\frac{\partial A_{Li}}{\partial x^k}\right)+\frac{1}{c}\cdot\left(\frac{\partial A_{Yk}}{\partial x^i}-\frac{\partial A_{Yi}}{\partial x^k}\right)^*=$$

$$=\sum_L \lambda_{YL}\cdot\left(-\frac{\partial A_{Lk}}{\partial x^i}+\frac{\partial A_{Li}}{\partial x^k}\right)-\frac{1}{c}\cdot\left(-\frac{\partial A_{Yk}}{\partial x^i}+\frac{\partial A_{Yi}}{\partial x^k}\right)^* = \left(\overline{Y}, -c\cdot\overline{\Phi}_Y\right)$$

$$(\xi)\cdot(\xi)=(\nu)^{-1} \quad , \quad (\xi)=\sqrt{(\nu)^{-1}} \quad , \quad (\chi)=\sqrt{(\nu)^{-1}}\cdot(\lambda)=(\xi)\cdot(\lambda),$$

$$(\nu)^T=(\nu) \;, (\mu)^T=(\mu) \;.$$

$$T_{Yik}=\sum_N \xi_{YN}\cdot F_{Nik} =$$

$$=\sum_N \xi_{YN}\cdot\sum_L \lambda_{NL}\cdot\left(-\frac{\partial A_{Lk}}{\partial x^i}+\frac{\partial A_{Li}}{\partial x^k}\right)-\frac{1}{c}\cdot\sum_L \xi_{YL}\cdot\left(-\frac{\partial A_{Lk}}{\partial x^i}+\frac{\partial A_{Li}}{\partial x^k}\right)^* =$$

$$=\sum_L \chi_{YL}\cdot\left(-\frac{\partial A_{Lk}}{\partial x^i}+\frac{\partial A_{Li}}{\partial x^k}\right)-\frac{1}{c}\cdot\sum_L \xi_{YL}\cdot\left(-\frac{\partial A_{Lk}}{\partial x^i}+\frac{\partial A_{Li}}{\partial x^k}\right)^* .$$

Здесь $A^i=\left(A^0, c\cdot\overline{A}\right)=\left(\varphi, c\cdot\overline{A}\right)$; $A_i=\left(A_0, -c\cdot\overline{A}\right)=\left(\varphi, -c\cdot\overline{A}\right)$.

Тензор $\left(-\frac{\partial A_{Yk}}{\partial x^i}+\frac{\partial A_{Yi}}{\partial x^k}\right)^* = \left(-c\cdot rot\overline{A}_Y \;, -\frac{\partial \overline{A}_Y}{\partial t}-grad\varphi_Y\right)$

дуален тензору

$$-\left(\frac{\partial A_{Yk}}{\partial x^i}-\frac{\partial A_{Yi}}{\partial x^k}\right)=\left(\frac{\partial A_{Yi}}{\partial x^k}-\frac{\partial A_{Yk}}{\partial x^i}\right)=\left(\frac{\partial \overline{A}_Y}{\partial t}+grad\varphi_Y \;, -c\cdot rot\overline{A}_Y\right) .$$

$$F_{Yik}=\sum_L \lambda_{YL}\cdot\left(-\frac{\partial A_{Lk}}{\partial x^i}+\frac{\partial A_{Li}}{\partial x^k}\right)-\frac{1}{c}\cdot\left(-\frac{\partial A_{Yk}}{\partial x^i}+\frac{\partial A_{Yi}}{\partial x^k}\right)^* =$$

$$=\left(\sum_L \lambda_{YL}\left(\frac{\partial \overline{A}_L}{\partial t}+grad\varphi_L\right)+rot\overline{A}_Y \;,\right.$$

$$\left.\frac{1}{c}\cdot\left(\frac{\partial \overline{A}_Y}{\partial t}+grad\varphi_Y\right)-c\cdot\sum_L \lambda_{YL}\cdot rot\overline{A}_L\right)=\left(\overline{Y}, -c\cdot\overline{\Phi}_Y\right).$$

$$\overline{Y}=\sum_L \lambda_{YL}\left(\frac{\partial \overline{A}_L}{\partial t}+grad\varphi_L\right)+rot\overline{A}_Y \;.$$

$$\overline{\Phi}_Y = \sum_L \lambda_{YL} \cdot \overline{L} = \left(-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{\partial \overline{A}_Y}{\partial t} + grad\varphi_Y\right) + \sum_L \lambda_{YL} \cdot rot\overline{A}_L \ .$$

$$-c\cdot\overline{\Phi}_Y = \left(+\frac{1}{c}\right)\cdot\left(\frac{\partial \overline{A}_Y}{\partial t} + grad\varphi_Y\right) - c\cdot\sum_L \lambda_{YL} \cdot rot\overline{A}_L \ .$$

Найдем вариацию этого действия, варьируя потенциалы поля A_{Yik} .

$$\delta S_f = \delta\int a\cdot\sum_Y T_{Yik}\cdot T_Y^{\ ik} d\Omega =$$

$$= \int\sum_Y a\cdot\left(T_{Yik}\cdot\delta T_Y^{\ ik} + T_Y^{\ ik}\cdot\delta T_{Yik}\right)d\Omega =$$

$$= / T_{Yik}\cdot\delta T_Y^{\ ik} = T_Y^{\ ik}\cdot\delta T_{Yik} / = \sum_Y 2a\cdot\int T_Y^{\ ik}\cdot\delta T_{Yik} d\Omega \ .$$

$$\delta T_{Yik} = \delta\Big\{\sum_L \chi_{YL}\cdot\left(-\frac{\partial A_{Lk}}{\partial x^i} + \frac{\partial A_{Li}}{\partial x^k}\right) -$$

$$-\frac{1}{c}\cdot\sum_L \xi_{YL}\cdot\left(-\frac{\partial A_{Lk}}{\partial x^i} + \frac{\partial A_{Li}}{\partial x^k}\right)^* \Big\} =$$

$$= \sum_L \chi_{YL}\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial x^i}\delta A_{Lk} + \frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_{Li}\right) -$$

$$-\frac{1}{c}\cdot\sum_L \xi_{YL}\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial x^i}\delta A_{Lk} + \frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_{Li}\right)^* \ .$$

$$\delta S_f = \sum_Y 2\cdot a\cdot\int\Big\{T_Y^{\ ik}\cdot\sum_L \chi_{YL}\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial x^i}\delta A_{Lk} + \frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_{Li}\right) -$$

$$-\frac{1}{c}\cdot T_Y^{\ ik}\cdot\sum_L \xi_{YL}\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial x^i}\delta A_{Lk} + \frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_{Li}\right)^* \Big\} d\Omega =$$

$$= /\ \textit{учитывая, что}\ \ A^{ik}\cdot B_{ik}^* = +A^{*ik}\cdot B_{ik} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_Y^{\ ik}\cdot\sum_L \xi_{YL}\cdot\left(-\frac{\partial}{\partial x^i}\delta A_{Yk} + \frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_{Yi}\right)^* =$$

$$= +T_Y^{*ik} \cdot \sum_L \xi_{YL} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial x^i} \delta A_{Yk} + \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_{Yi} \right) / =$$

$$= \sum_Y 2 \cdot a \cdot \int \{ \ -T_Y{}^{ik} \cdot \sum_L \chi_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \delta A_{Lk} + T_Y{}^{ik} \cdot \sum_L \chi_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_{Li} +$$

$$+ \frac{1}{c} \cdot T^*{}_Y{}^{ik} \cdot \sum_L \xi_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \delta A_{Lk} - \frac{1}{c} \cdot T^*{}_Y{}^{ik} \cdot \sum_L \xi_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_{Li} \ \} d\Omega =$$

$=$ / *в первом и третьем членах*

меняем местами коэффициенты i *и* k / $=$

$$= \sum_Y 2 \cdot a \cdot \int \{ \ -T_Y{}^{ki} \cdot \sum_L \chi_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_{Li} + T_Y{}^{ik} \cdot \sum_L \chi_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_{Li} +$$

$$+ \frac{1}{c} \cdot T^*{}_Y{}^{ki} \cdot \sum_L \xi_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_{Li} - \frac{1}{c} \cdot T^*{}_Y{}^{ik} \cdot \sum_L \xi_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_{Li} \ \} d\Omega$$

$$= / T_Y{}^{ki} = -T_Y{}^{ik} / =$$

$$= \sum_Y 2 \cdot a \cdot \int \{ T_Y{}^{ik} \cdot \sum_L \chi_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_{Li} + T_Y{}^{ik} \cdot \sum_L \chi_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_{Li} -$$

$$- \frac{1}{c} \cdot T_Y^{*ik} \cdot \sum_L \xi_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_{Li} - \frac{1}{c} \cdot T^*{}_Y{}^{ik} \cdot \sum_L \xi_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_{Li} \ \} d\Omega =$$

$$= \sum_Y 4 \cdot a \cdot \int \{ T_Y{}^{ik} \cdot \sum_L \chi_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_{Li} - \frac{1}{c} T^*{}_Y{}^{ik} \cdot \sum_L \xi_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_{Li} \ \} d\Omega =$$

$$= / \quad a) \quad \int T_Y{}^{ik} \cdot \sum_L \chi_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_{Li} =$$

$$= \int \frac{\partial T_Y{}^{ik}}{\partial x^k} \cdot \sum_L \chi_{YL} \cdot \delta A_{Li} d\Omega - \int T_Y{}^{ik} \cdot \sum_L \chi_{YL} \cdot \delta A_{Li} dS_k =$$

т.к. второй интеграл на пределах интегрирования

обращается в ноль $= \int \frac{\partial T_Y{}^{ik}}{\partial x^k} \cdot \sum_L \chi_{YL} \cdot \delta A_{Li} d\Omega$

б) $\int T^*{}_Y{}^{ik} \cdot \sum_L \xi_{YL} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_{Lk} \ \} d\Omega =$

$$= \int \frac{\partial T_Y^{*ik}}{\partial x^k} \cdot \sum_L \xi_{YL} \delta A_{Li} d\Omega - \int T_Y^{*ik} \cdot \sum_L \xi_{YL} \cdot \delta A_{Li} dS_k =$$

= второй интеграл на пределах интегрирования

обращается в ноль $= \int \frac{\partial T_Y^{*ik}}{\partial x^k} \cdot \sum_L \xi_{YL} \delta A_{Li} d\Omega \quad / =$

$$= \sum_Y 4a \cdot \{ \int \frac{\partial T_Y^{ik}}{\partial x^k} \cdot \sum_L \chi_{YL} \cdot \delta A_{Li} d\Omega - \frac{1}{c} \cdot \int \frac{\partial T_Y^{*ik}}{\partial x^k} \cdot \sum_L \xi_{YL} \cdot \delta A_{Li} d\Omega \}.$$

Окончательно: $\delta S_f =$

$$= \sum_Y 4a \cdot \left\{ \int \frac{\partial T_Y^{ik}}{\partial x^k} \cdot \sum_L \chi_{YL} \cdot \delta A_{Li} d\Omega - \frac{1}{c} \cdot \int \frac{\partial T_Y^{*ik}}{\partial x^k} \cdot \sum_L \xi_{YL} \cdot \delta A_{Li} d\Omega \right\}.$$

§ 15 Действие для взаимодействия частиц с полем.

$$S_{mf} = \frac{1}{c} \cdot \sum_Y \int j_Y^i \cdot \left(\sum_L \lambda_{YL} \cdot A_{Li} \right) d\Omega \; -$$

$$- \sum_Y \int (\bar{j}_Y \cdot rot \int \bar{A}_Y dt) d\Omega + \sum_Y \int \left(\int \bar{A}_Y dt \cdot rot \, \bar{j}_Y \right) d\Omega \; ,$$

$d\Omega = dx \cdot dy \cdot dz \cdot c \cdot dt$. Или что, то же самое

$$S_{mf} = \frac{1}{c} \cdot \sum_Y \int j_Y^i \cdot \left(\sum_L \lambda_{YL} \cdot A_{Li} \right) d\Omega + \sum_Y \int div [\, \bar{j} \times \int \bar{A}_Y dt \,] d\Omega \quad .$$

Найдем вариацию этого действия, варьируя потенциалы поля A_{Li} .

I. В п. I получим результат, который будет использован в п. II при нахождении вариации действия S_{mf} .

Рассмотрим часть действия

$$S_1 = - \sum_Y \int (\bar{j}_Y \cdot rot \int \bar{A}_Y dt) d\Omega + \sum_Y \int \left(\int \bar{A}_Y dt \cdot rot \, \bar{j}_Y \right) d\Omega =$$

$$= \sum_Y \int div [\, \bar{j}_Y \times \int \bar{A}_Y dt \,] d\Omega =$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_Y\int_V div[\overline{j}_Y\times\int\overline{A}_Y dt\ ]dV\right)\cdot c\cdot dt\ .$$

$$\delta S_1=\delta\sum_Y\int div\left[\overline{j}_Y\ \times\int\overline{A}_Y\,dt\right]d\Omega=\sum_Y\int div\left[\overline{j}_Y\times\int\delta\overline{A}_Y\,dt\right]d\Omega=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}(\sum_Y\int_V\ div[\ \overline{j}_Y\times\int\delta\overline{A}_Y\ dt\ \ ]dV)\cdot c\cdot dt=$$

$=\ \ /$ *Применяя теорему Гаусса, получим* $/=$

$$=\int_{t_1}^{t_2}(\sum_Y\oint_S[\ \overline{j}_Y\times\int\delta\overline{A}_Y\ dt\ \ ]\cdot d\overline{S})\,dt=$$

$=\ \ /$ *Пределами интегрирования по координатам является бесконечность, где поле исчезает. На пре – лах же интегрирования по времени, т.е. в заданные начальный и конечный моменты времени, вариация потенциалов равна нулю, т.к. по смыслу принципа наименьшего действия потенциалы в эти моменты заданы.* *см.* [1] $/=0$.

Окончательно :

$$\delta S_1=\delta\sum_Y\int div[\ \overline{j}_Y\times\int\overline{A}_Y dt\ \ ]d\Omega=0\ \ .$$

II. Вариация действия S_{mf} .

При нахождении вариации этого действия, будем варьировать потенциалы поля A_{Li} .

$$\delta\,S_{mf}=\delta\left(\frac{1}{c}\cdot\sum_Y\int j_Y^i\cdot\left(\sum_L\lambda_{YL}\cdot A_{Li}\right)d\Omega+\sum_Y\int div\left[\overline{j}\times\int\overline{A}_Y dt\right]d\Omega\right)=$$

$$=\frac{1}{c}\cdot\sum_Y\int j_Y^i\cdot\left(\sum_L\lambda_{YL}\cdot\delta A_{Li}\right)d\Omega+\delta\sum_Y\int div\left[\overline{j}_Y\times\int\overline{A}_Y\,dt\right]d\Omega=$$

$=/\ \ $ *Согласно п.I : второе слагаемое равно нулю,* $/=$

$$=\sum_Y \frac{1}{c}\cdot\int\left\{ j_Y^i\cdot\left(\sum_L \lambda_{YL}\cdot\delta A_{Li}\right)\right\} d\Omega \ .$$

Таким образом, $\delta S_{mf}=\sum_Y \frac{1}{c}\cdot\int\left\{ j_Y^i\cdot\left(\sum_L \lambda_{YL}\cdot\delta A_{Li}\right)\right\} d\Omega$.

§ 16 Получение уравнений поля из принципа наименьшего действия.

Действие $S=S_f+S_{mf}$.

S_f , S_{mf} , δS_f , δS_{mf} определены в §14 и §15 .

$$\delta S=\delta S_f+\delta S_{mf}=$$

$$=\int\sum_Y 4a\cdot\left(\frac{\partial T_Y^{\ ik}}{\partial x^k}\cdot\sum_L \chi_{YL}\cdot\delta A_{Li}-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial T_Y^{*ik}}{\partial x^k}\sum_L \xi_{YL}\cdot\delta A_{Li}\right)d\Omega+$$

$$+\sum_Y\frac{1}{c}\cdot\int j_Y^i\cdot\left(\sum_L \lambda_{YL}\cdot\delta A_{Li}\right)d\Omega=$$

$$=\sum_Y\int\left\{4a\cdot\frac{\partial T_Y^{\ ik}}{\partial x^k}\cdot\sum_L \chi_{YL}\cdot\delta A_{Li}-\frac{1}{c}\cdot 4a\cdot\frac{\partial T_Y^{*ik}}{\partial x^k}\cdot\sum_L \xi_{YL}\cdot\delta A_{Li}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c}\cdot j_Y^i\cdot\left(\sum_L \lambda_{YL}\cdot\delta A_{Li}\right)\right\}d\Omega=$$

$$=\sum_L\int\left\{4a\cdot\sum_Y \chi_{YL}\cdot\frac{\partial T_Y^{\ ik}}{\partial x^k}\cdot\delta A_{Li}-\frac{1}{c}\cdot 4a\cdot\sum_Y \xi_{YL}\cdot\frac{\partial T_Y^{*ik}}{\partial x^k}\cdot\delta A_{Li}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c}\cdot\sum_Y \lambda_{YL}\cdot j_Y^i\cdot\delta A_{Li}\right\}d\Omega=$$

$$= \sum_L \int \left\{ 4a \cdot \sum_Y \chi_{YL} \cdot \frac{\partial T_Y{}^{ik}}{\partial x^k} - \frac{1}{c} \cdot 4a \cdot \sum_Y \xi_{YL} \cdot \frac{\partial T_Y^{*ik}}{\partial x^k} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c} \cdot \sum_Y \lambda_{YL} \cdot j_Y^i \right\} \cdot \delta A_{Li} \cdot d\Omega \quad .$$

Получим уравнения поля из принципа наименьшего действия

$$\delta S = \delta S_f + \delta S_{mf} = 0 \quad .$$

$$\sum_L \int \left\{ 4a \cdot \sum_Y \chi_{YL} \cdot \frac{\partial T_Y{}^{ik}}{\partial x^k} - \frac{1}{c} \cdot 4a \cdot \sum_Y \xi_{YL} \cdot \frac{\partial T_Y^{*ik}}{\partial x^k} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c} \cdot \sum_Y \lambda_{YL} \cdot j_Y^i \right\} \cdot \delta A_{Li} \cdot d\Omega = 0 \quad .$$

$$4a \cdot \sum_Y \chi_{YL} \cdot \frac{\partial T_Y{}^{ik}}{\partial x^k} - \frac{1}{c} \cdot 4a \cdot \sum_Y \xi_{YL} \cdot \frac{\partial T_Y^{*ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} \cdot \sum_Y \lambda_{YL} \cdot j_Y^i = 0 \quad .$$

Положим $a = \dfrac{1}{8}$ тогда уравнения поля:

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_Y \chi_{YL} \cdot \frac{\partial T_Y{}^{ik}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c} \cdot \sum_Y \xi_{YL} \cdot \frac{\partial T_Y^{*ik}}{\partial x^k} = -\frac{1}{c} \cdot \sum_Y \lambda_{YL} \cdot j_Y^i$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_Y \chi_{YL} \cdot \frac{\partial T_Y{}^{ik}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c} \cdot \sum_Y \xi_{YL} \cdot \frac{\partial T_Y^{*ik}}{\partial x^k} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c} \cdot \sum_Y \lambda_{YL} \cdot j_Y^i - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c} \cdot \sum_Y \lambda_{YL} \cdot j_Y^i$$

$$\left(\sum_Y \chi_{YL} \cdot \frac{\partial T_Y{}^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} \cdot \sum_Y \lambda_{YL} \cdot j_Y^i \right) +$$

$$+ \left(-\frac{1}{c} \cdot \sum_Y \xi_{YL} \cdot \frac{\partial T_Y^{*ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} \cdot \sum_Y \lambda_{YL} \cdot j_Y^i \right) = 0 \quad .$$

Откуда с необходимостью следует:

$$\sum_Y \chi_{YL} \cdot \frac{\partial T_Y{}^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} \cdot \sum_Y \lambda_{YL} \cdot j_Y^i = 0$$

$$-\frac{1}{c} \cdot \sum_Y \xi_{YL} \cdot \frac{\partial T_Y^{*ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} \cdot \sum_Y \lambda_{YL} \cdot j_Y^i = 0 \quad .$$

а) $$\sum_Y \chi_{YL} \cdot \frac{\partial T_Y{}^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{1}{c} \cdot \sum_Y \lambda_{YL} \cdot j_Y^i \quad .$$

В §14 определено , что

$$\sum_L \xi_{YL} \cdot F_L{}^{ik} = T_Y{}^{ik} \quad , \quad (\xi) = \sqrt{(\nu)^{-1}} \quad , \quad (\chi) = (\xi) \cdot (\lambda) \, .$$

Тогда в матричной записи

$$(\chi)^T \cdot \left\{ \frac{\partial T_Y{}^{ik}}{\partial x^k} \right\} = -\frac{1}{c} \cdot (\lambda)^T \cdot \{ j_Y^i \}$$

$$((\xi) \cdot (\lambda))^T \cdot \left\{ \frac{\partial T_Y{}^{ik}}{\partial x^k} \right\} = -\frac{1}{c} \cdot (\lambda)^T \cdot \{ j_Y^i \}$$

$$(\lambda)^T \cdot (\xi)^T \cdot \left\{ \frac{\partial T_Y{}^{ik}}{\partial x^k} \right\} = -\frac{1}{c} \cdot (\lambda)^T \cdot \{ j_Y^i \}$$

$$(\xi)^T \cdot (\xi) \cdot \left\{ \frac{\partial F_Y{}^{ik}}{\partial x^k} \right\} = -\frac{1}{c} \cdot \{ j_Y^i \}$$

$$(\xi) \cdot (\xi) \cdot \left\{ \frac{\partial F_Y{}^{ik}}{\partial x^k} \right\} = -\frac{1}{c} \cdot \{ j_Y^i \}$$

$$(\nu)^{-1} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathrm{F_Y}{}^{\mathrm{ik}}}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{k}}} \right\} = -\frac{1}{\mathrm{c}} \cdot \{ \mathrm{j}_{\mathrm{Y}}^{\mathrm{i}} \}$$

$$\left\{ \frac{\partial F_Y{}^{ik}}{\partial x^k} \right\} = -\frac{1}{c} \cdot (\nu) \cdot \{ j_Y^i \}$$

или $$\frac{\partial F_Y{}^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{1}{c} \cdot \sum_L \nu_{YL} \cdot j_L^i \quad .$$

б) $$\sum_Y \xi_{YL} \frac{\partial T_Y^{*ik}}{\partial x^k} = \sum_Y \lambda_{YL} \cdot j_Y^i \quad .$$

В матричной записи

$$(\xi)^T \cdot \left\{ \frac{\partial T_Y^{*ik}}{\partial x^k} \right\} = (\lambda)^T \cdot \left\{ j_Y{}^i \right\}$$

$$(\xi)^T \cdot (\xi) \cdot \left\{ \frac{\partial F_Y^{*ik}}{\partial x^k} \right\} = \left((\mu) \cdot (\nu)^{-1} \right)^T \cdot \left\{ j_Y{}^i \right\}$$

$$(\xi) \cdot (\xi) \cdot \left\{ \frac{\partial F_Y^{*ik}}{\partial x^k} \right\} = \left((\nu)^{-1} \right)^T \cdot (\mu)^T \cdot \left\{ j_Y{}^i \right\}$$

$$(\nu)^{-1} \cdot \left\{ \frac{\partial F_Y^{*ik}}{\partial x^k} \right\} = \left((\nu)^{-1} \right) (\mu)^T \cdot \left\{ j_Y{}^i \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial F_Y^{*ik}}{\partial x^k} \right\} = (\mu)^T \cdot \left\{ j_Y{}^i \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial F_Y^{*ik}}{\partial x^k} \right\} = (\mu) \cdot \left\{ j_Y{}^i \right\}$$

или $$\frac{\partial F_Y^{*ik}}{\partial x^k} = \sum_L \mu_{YL} \cdot j_L^i \quad .$$

Здесь учтено, что :

$\nu_{YL} = \nu_{LY} \quad , \quad \mu_{YL} = \mu_{LY}$

$$(\lambda)^T = \left((\mu) \cdot (\nu)^{-1} \right)^T = \left((\nu)^{-1} \right)^T \cdot (\mu)^T = (\nu)^{-1} \cdot (\mu)^T = (\nu)^{-1} \cdot (\mu),$$

где $(\lambda)^T$ *– транспонированная матрица ,*

если бы $(\mu)^T = -(\mu)$*, то не получили бы уравнений поля.*

Окончательно уравнения поля:

$$\frac{\partial F_Y{}^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{1}{c} \cdot \sum_L \nu_{YL} \cdot j_L^i$$

$$\frac{\partial F_Y^{*ik}}{\partial x^k} = \sum_L \mu_{YL} \cdot j_L^i \quad ,$$

где:

$$F_{Yik} = \sum_L \lambda_{YL} \cdot \left(-\frac{\partial A_{Lk}}{\partial x^i} + \frac{\partial A_{Li}}{\partial x^k} \right) - \frac{1}{c} \cdot \left(-\frac{\partial A_{Yk}}{\partial x^i} + \frac{\partial A_{Li}}{\partial x^k} \right)^* = \left(\overline{Y}, -c \cdot \overline{\varPhi}_Y \right).$$

$$F_{Yik} = \left(\overline{Y}, -c \cdot \overline{\varPhi}_Y \right) = \\ = \begin{pmatrix} 0 & Y_x & Y_y & Y_z \\ -Y_x & 0 & -c \cdot (-\varPhi_{Yz}) & c \cdot (-\varPhi_{Yy}) \\ -Y_y & c \cdot (-\varPhi_{Yz}) & 0 & -c \cdot (-\varPhi_{Yx}) \\ -Y_Z & -c \cdot (-\varPhi_{Yy}) & c(-\varPhi_{Yx}) & 0 \end{pmatrix} .$$

$$F_Y{}^{ik} = \left(-\overline{Y}, -c \cdot \overline{\varPhi}_Y \right) = \\ = \begin{pmatrix} 0 & -Y_x & -Y_y & -Y_z \\ Y_x & 0 & -c \cdot (-\varPhi_{Yz}) & c \cdot (-\varPhi_{Yy}) \\ Y_y & c \cdot (-\varPhi_{Yz}) & 0 & -c \cdot (-\varPhi_{Yx}) \\ Y_Z & -c \cdot (-\varPhi_{Yy}) & c \cdot (-\varPhi_{Yx}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Дуальные тензоры:

$$F^*_{Yik} = \left(-c \cdot \overline{\varPhi}_Y, -\overline{Y} \right) = \\ = \begin{pmatrix} 0 & -c \cdot (-\varPhi_{Yx}) & -c \cdot (-\varPhi_Y)_y & -c \cdot (-\varPhi_{Yz}) \\ c \cdot (-\varPhi_{Yx}) & 0 & -(-Y_z) & -Y_y \\ c \cdot (-\varPhi_{Yy}) & -Y_z & 0 & -(-Y_x) \\ c \cdot (-\varPhi_{Yz}) & -(-Y_y) & -Y_x & 0 \end{pmatrix}.$$

$$F_Y^{*ik} = \left(c \cdot \overline{\Phi}_Y, -\overline{Y}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & c\cdot\left(-\Phi_{Y\,x}\right) & c\cdot\left(-\Phi_Y\right)_y & c\cdot\left(-\Phi_{Y\,z}\right) \\ -c\cdot\left(-\Phi_{Y\,x}\right) & 0 & -\left(-Y_z\right) & -Y_y \\ -c\cdot\left(-\Phi_{Y\,y}\right) & -Y_z & 0 & -\left(-Y_x\right) \\ -c\cdot\left(-\Phi_{Y\,z}\right) & -\left(-Y_y\right) & -Y_x & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -c\Phi_x & -c\Phi_y & -c\Phi_z \\ c\Phi_x & 0 & +Y_z & -Y_y \\ c\Phi_y & -Y_z & 0 & +Y_x \\ c\Phi_z & +Y_y & -Y_x & 0 \end{pmatrix} .$$

$$\overline{Y} = \sum_L \lambda_{YL} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}\overline{A}_L + grad\varphi_L\right) + rot\overline{A}_Y \;.$$

$$\overline{\Phi}_Y = \sum_N \lambda_{YN} \cdot \overline{N} \;.$$

Уравнения поля:

$$\frac{\partial F_Y^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{1}{c} \cdot \sum_L \nu_{YL} \cdot j_L^i \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{c} \cdot \dfrac{\partial \overline{Y}}{\partial t} + c \cdot rot\overline{\Phi}_Y = -\dfrac{1}{c} \cdot \sum\limits_L \nu_{YL} \cdot \overline{j}_L \quad , & i = 1,2,3 \\ \\ -div\overline{Y} = -\dfrac{1}{c} \cdot \sum\limits_L \nu_{YL} \cdot c \cdot \rho_L \quad , & i = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_Y^{*ik}}{\partial x^k} = \sum_L \mu_{YL} \cdot j_L^i \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial \overline{\Phi}_Y}{\partial t} + rot\overline{Y} = \sum\limits_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L \quad , \qquad i = 1,2,3 \\ c \cdot div\overline{\Phi}_Y \quad = \sum\limits_L \mu_{YL} \cdot c \cdot \rho_L \qquad , \qquad i = 0 \end{cases} .$$

Окончательно уравнения поля

$$div\overline{Y} = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L$$

$$rot\overline{Y} = \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L \quad + \quad \frac{\partial \overline{\Phi}_Y}{\partial t} \quad .$$

§ 17 Вывод формулы для силы Лоренца.

Уравнения Лагранжа в символической записи:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \overline{\mathrm{v}}} - \frac{\partial L}{\partial \overline{r}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{\mathrm{v}}} = grad_v L \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \overline{r}} = grad_r L \quad .$$

Функция Лагранжа это разность кинетической и потенциальной энергий:

$$L = T - U = \frac{m \cdot \mathrm{v}^2}{2} - U(\overline{r}, \overline{\mathrm{v}})$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \overline{\mathrm{v}}} - \frac{\partial L}{\partial \overline{r}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \overline{\mathrm{v}}}\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2} - U(\overline{r}, \overline{\mathrm{v}})\right) - \frac{\partial}{\partial \overline{r}}\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2} - U(\overline{r}, \overline{\mathrm{v}})\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} grad_v\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2} - U(\overline{r}, \overline{\mathrm{v}})\right) - grad_r\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2} - U(\overline{r}, \overline{\mathrm{v}})\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \overline{\mathrm{v}}) - \frac{d}{dt} grad_v U + grad_r U = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\cdot\overline{\mathrm{v}}\right)=\frac{d}{dt}grad_{v}U-grad_{r}U$$

$\overline{f}=\frac{d}{dt}grad_{v}U-grad_{r}U$ - сила, действующая на частицу.

Действие взаимодействия:

$$S_{mf}=\{\sum_{Y}\int\frac{1}{c}\cdot j_{Y}^{i}\cdot\left(\sum_{L}\lambda_{YL}\cdot A_{Li}\right)d\Omega\;-$$

$$-\sum_{Y}\int(\overline{j}_{Y}\cdot rot\int\overline{A}_{Y}dt)d\Omega+\sum_{Y}\int\left(\int\overline{A}_{Y}dt\cdot rot\,\overline{j}_{Y}\right)d\Omega\}\quad,$$

$$d\Omega=dx\cdot dy\cdot dz\cdot c\cdot dt\quad.$$

А значит плотность функции Лагранжа:

$$\Lambda_{mf}=\sum_{Y}\;\{\frac{1}{c}\cdot j_{Y}^{i}\cdot\left(\sum_{L}\lambda_{YL}\cdot A_{Li}\right)-\overline{j}_{Y}\cdot rot\int\overline{A}_{Y}dt+\left(rot\,\overline{j}_{Y}\right)\cdot\int\overline{A}_{Y}dt\;\}.$$

Учитывая, что

$$A^{i}=\left(\varphi,c\cdot\overline{A}\right);\;j_{Y}{}^{i}=\left(c\cdot\rho_{Y,}\,\overline{j}_{Y}\right)\;,$$

функция Лагранжа для взаимодействия частицы с единым полем:

$$L_{mf}=\sum_{Y}\;\{q_{Y}\cdot\frac{1}{c}\cdot\left(c\cdot\sum_{L}\lambda_{YL}\cdot\varphi_{L}-c\cdot\sum_{L}\lambda_{YL}\cdot\overline{\mathrm{v}}\cdot\overline{A}_{L}\right)-$$

$$-q_{Y}\cdot\overline{\mathrm{v}}\cdot rot\int\overline{A}_{Y}dt+\left(rot\,q_{Y}\cdot\overline{\mathrm{v}}\right)\int\overline{A}_{Y}dt\;\}\;.$$

Здесь $rot\;q_{Y}\cdot\overline{\mathrm{v}}=0$, $A^{i}=\left(\varphi,c\cdot\overline{A}\right)$.

$$L_{mf}=\sum_{Y}\{q_{Y}\cdot\left(\sum_{L}\lambda_{YL}\cdot\varphi_{L}-\sum_{L}\lambda_{YL}\cdot\overline{\mathrm{v}}\cdot\overline{A}_{L}\right)-q_{Y}\cdot\overline{\mathrm{v}}\cdot rot\int\overline{A}_{Y}dt\;\}.$$

$$U=-L_{mf}=\sum_{Y}\{q_{Y}\cdot\left(-\sum_{L}\lambda_{YL}\cdot\varphi_{L}+\sum_{L}\lambda_{YL}\cdot\overline{\mathrm{v}}\cdot\overline{A}_{L}\right)+q_{Y}\cdot\overline{\mathrm{v}}\cdot rot\int\overline{A}_{Y}dt\;\}.$$

а)

$$grad_r U = grad_r \{ \sum_Y q_Y \cdot \left(-\sum_L \lambda_{YL} \cdot \varphi_L + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \bar{v} \cdot \bar{A}_L \right) +$$

$$+ q_Y \cdot \bar{v} \cdot rot \int \bar{A}_Y dt \} =$$

$$= \sum_Y q_Y \cdot \left(-\sum_L \lambda_{YL} \cdot grad_r \varphi_L + \sum_L \lambda_{YL} grad_r \left(\bar{v} \cdot \bar{A}_L \right) \right) +$$

$$+ q_Y \cdot grad_r \left(\bar{v} \cdot rot \int \bar{A}_Y dt \right) =$$

$$= \sum_Y q_Y \cdot (-\sum_L \lambda_{YL} \cdot grad_r \varphi_L + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \left(\bar{v} \cdot \bar{\nabla} \right) \bar{A}_L +$$

$$+ \sum_L \lambda_{YL} \cdot \left[\bar{v} \times rot \bar{A}_L \right] +$$

$$+ \left(\bar{v} \cdot \bar{\nabla} \right) \cdot rot \int \bar{A}_Y dt + \left[\bar{v} \times rot\ rot \int \bar{A}_Y dt \right]) \ .$$

б)

$$\frac{d}{dt} grad_v U = \frac{d}{dt} grad_v (\sum_Y \{ q_Y \cdot \left(-\sum_L \lambda_{YL} \cdot \varphi_L + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \bar{v} \cdot \bar{A}_{Li} \right) +$$

$$+ q_Y \cdot \bar{v} \cdot rot \int \bar{A}_Y dt \}) =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_Y q_Y \cdot \{ grad_v \left(\sum_L \lambda_{YL} \cdot \bar{v} \cdot \bar{A}_L \right) + grad_v \left(\bar{v} \cdot rot \int \bar{A}_Y dt \right) \} =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_Y q_Y \{ \sum_L \lambda_{YL} \cdot \bar{A}_L + grad_v \left(\bar{v} \cdot rot \int \bar{A}_Y dt \right) \} =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_Y q_Y \{ \sum_L \lambda_{YL} \cdot \bar{A}_L + rot \int \bar{A}_Y dt \} =$$

$$= \sum_Y q_Y \cdot \{ \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{d \bar{A}_L}{dt} + \frac{d}{dt} rot \int \bar{A}_Y dt \} =$$

$$= \quad / \text{ Учтем, что } \frac{d \bar{A}}{dt} = \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \left(\bar{v} \cdot \bar{\nabla} \right) \cdot \bar{A} \quad / \quad =$$

$$=\sum_Y q_Y \left\{ \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{A}_L}{\partial t} + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \left(\overline{v} \cdot \overline{\nabla}\right)\overline{A}_L + \frac{d}{dt} rot \int \overline{A}_Y dt \right\} =$$

$$=\sum_Y q_Y \left\{ \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{A}_L}{\partial t} + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \left(\overline{v} \cdot \overline{\nabla}\right)\overline{A}_L + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial t} rot \int \overline{A}_Y dt + \left(\overline{v} \cdot \overline{\nabla}\right) rot \int \overline{A}_Y dt \right\} .$$

в) $$\overline{f} = \frac{d}{dt} grad_v U - grad_r U =$$

$$=\sum_Y q_Y \left\{ \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{A}_L}{\partial t} + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \left(\overline{v} \cdot \overline{\nabla}\right)\overline{A}_L + \frac{\partial}{\partial t} rot \int \overline{A}_Y dt + \right.$$

$$\left. + \left(\overline{v} \cdot \overline{\nabla}\right) rot \int \overline{A}_Y dt \right\} - \sum_Y \left\{ q_Y \cdot \left(-\sum_L \lambda_{YL} \cdot grad_r \varphi_L + \right. \right.$$

$$+ \sum_L \lambda_{YL} \cdot \left(\overline{v} \cdot \overline{\nabla}\right)\overline{A}_L + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \left[\overline{v} \times rot \overline{A}_L\right] +$$

$$\left. \left. + \left(\overline{v} \cdot \overline{\nabla}\right) rot \int \overline{A}_Y dt + \left[\overline{v} \times rot\ rot \int \overline{A}_Y dt\right] \right) \right\} =$$

$$=\sum_Y q_Y \left\{ \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{A}_L}{\partial t} + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \left(\overline{v} \cdot \overline{\nabla}\right)\overline{A}_L + \frac{\partial}{\partial t} rot \int \overline{A}_Y dt + \right.$$

$$+ \left(\overline{v} \cdot \overline{\nabla}\right) rot \int \overline{A}_Y dt +$$

$$+ \sum_L \lambda_{YL} \cdot grad_r \varphi_L - \sum_L \lambda_{YL} \cdot \left(\overline{v} \cdot \overline{\nabla}\right)\overline{A}_L - \sum_L \lambda_{YL} \cdot \left[\overline{v} \times rot \overline{A}_L\right] -$$

$$\left. - \left(\overline{v} \cdot \overline{\nabla}\right) rot \int \overline{A}_Y dt - \left[\overline{v} \times rot\ rot \int \overline{A}_Y dt\right] \right\} =$$

$$=\sum_Y q_Y \left\{ \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{A}_L}{\partial t} + rot \overline{A}_Y + \right.$$

$$\left. + \sum_L \lambda_{YL} \cdot grad_r \varphi_L - \sum_L \lambda_{YL} \cdot \left[\overline{v} \times rot \overline{A}_L\right] - \left[\overline{v} \times rot\ rot \int \overline{A}_Y dt\right] \right\} =$$

$$=\sum_Y q_Y \left\{ \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{A}_L}{\partial t} + \sum_L \lambda_{YL} \cdot grad_r \varphi_L + rot\ \overline{A}_Y - \right.$$

$$-\sum_L \lambda_{YL} \cdot \left[\overline{v} \times rot\,\overline{A}_L\right] - \left[\overline{v} \times rot\; rot \int \overline{A}_Y\, dt\right] \} =$$

$$= \quad / \quad rot\; rot \int \overline{A}_Y\, dt = grad\; div \int \overline{A}_Y\, dt - \nabla^2 \int \overline{A}_Y\, dt =$$

$$= grad\left(\frac{-1}{c^2}\int \frac{\partial \varphi_Y}{\partial t}\, dt\right) - \frac{1}{c^2} \cdot \int \frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{A}_Y\, dt + \mathrm{v} \cdot \int \sum_L \mu_{YL} \cdot \rho_L\, dt =$$

$$= -\frac{1}{c^2} \cdot grad\, \varphi_Y - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\overline{A}_Y + \mathrm{v} \cdot \int \sum_L \mu_{YL} \cdot \rho_L\, dt \quad / =$$

$$= \sum_Y q_Y \cdot \{ \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{A}_L}{\partial t} +$$

$$+ \sum_L \lambda_{YL} \cdot grad_r \varphi_L + rot\, \overline{A}_Y - \sum_L \lambda_{YL} \cdot \left[\overline{v} \times rot\,\overline{A}_L\right] -$$

$$-\left[\overline{\mathrm{v}} \times \left(-\frac{1}{c^2} \cdot grad\, \varphi_Y - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\overline{A}_Y + \overline{\mathrm{v}} \cdot \int \sum_L \mu_{YL} \cdot \rho_L\, dt\right)\right] \} =$$

$$= \sum_Y q_Y \{ \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{A}_L}{\partial t} + \sum_L \lambda_{YL} \cdot grad_r \varphi_L + rot\, \overline{A}_Y -$$

$$-\sum_L \lambda_{YL} \cdot \left[\overline{v} \times rot\,\overline{A}_L\right] - \left[\overline{\mathrm{v}} \times \left(-\frac{1}{c^2} \cdot grad\, \varphi_Y - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\overline{A}_Y\right)\right] \} =$$

$$= \sum_Y q_Y \{ \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{A}_L}{\partial t} + \sum_L \lambda_{YL} \cdot grad_r \varphi_L + rot\, \overline{A}_Y -$$

$$-\left[\overline{\mathrm{v}} \times \left(-\frac{1}{c^2} \cdot grad\, \varphi_Y - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\overline{A}_Y\right) + \sum_L \lambda_{YL} \cdot rot\,\overline{A}_Y\right] \} =$$

$$= \sum_Y q_Y \{ \overline{Y} - \left[\overline{v} \times \left(\overline{\Phi}_Y\right)\right] \} = \sum_Y q_Y \{ \overline{Y} + \left[\overline{v} \times \left(-\overline{\Phi}_Y\right)\right] \} .$$

Окончательно для одной частицы

$$\overline{f} = \frac{d}{dt} grad_v U - grad_r U =$$

$$= \sum_Y q_Y \left\{ \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{A}_L}{\partial t} + \sum_L \lambda_{YL} \cdot grad_r \varphi_L + rot\, \overline{A}_Y + \right.$$

$$\left. + \left[\overline{\mathrm{v}} \times \left(\frac{1}{c^2} \cdot grad\, \varphi_Y + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \overline{A}_Y \right) - \sum_L \lambda_{YL} \cdot rot \overline{A}_L \right] \right\} =$$

$$= \sum_Y q_Y \left\{ \overline{Y} + \left[\overline{\mathrm{v}} \times \left(-\overline{\Phi}_Y \right) \right] \right. .$$

Таким образом :

$$\overline{f} = \sum_Y \sum_L q_L \cdot \left\{ \overline{Y} + \left[\overline{\mathrm{v}} \times \left(-\overline{\Phi}_Y \right) \right] \right\} .$$

$$\overline{Y} = \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{A}_L}{\partial t} + \sum_L \lambda_{YL} \cdot grad \varphi_L + rot\, \overline{A}_Y \quad .$$

$$-\overline{\Phi}_Y = \left(\frac{1}{c^2} \cdot grad\, \varphi_Y + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \overline{A}_Y \right) - \sum_L \lambda_{YL} \cdot rot \overline{A}_L \quad .$$

§ 18 Действие для системы полей и частиц.

Действие S для всей системы, состоящей из полей вместе с находящимися в них частицами, должно состоять из трех частей:

$$S = S_f + S_m + S_{mf} \quad .$$

S_m есть та часть действия, которая зависит только от свойств частиц, т.е. действие для свободных частиц.

$$S = -\sum mc \cdot \int ds \quad .$$

S_{mf} есть та часть действия, которая обусловлена между частицами и полем. В §15 эта часть действия определена так:

$$S_{mf} = \frac{1}{c} \cdot \sum_Y \int j_Y^i \cdot \left(\sum_L \lambda_{YL} \cdot A_{Li} \right) d\Omega -$$

$$- \sum_Y \int (\overline{j}_Y \cdot rot \int \overline{A}_Y dt) d\Omega + \sum_Y \int \left(\int \overline{A}_Y dt \cdot rot\, \overline{j}_Y \right) d\Omega =$$

$$=\frac{1}{c}\cdot\sum_{Y}\int j_Y^i\cdot\left(\sum_L \lambda_{YL}\cdot A_{Li}\right)d\Omega+\sum_Y\int div\left[\,\overline{j}_Y\times\int\overline{A}_Y dt\,\right]d\Omega$$

$$d\Omega=dx\cdot dy\cdot dz\cdot c\cdot dt \quad .$$

S_f - есть та часть действия, которая зависит только от свойств самого поля, т.е. S_f - действие для полей в отсутствии зарядов. В §14 эта часть действия определена так:

$$S_f=\int\sum_Y a\cdot T_{Yik}\cdot T_Y^{\ ik}d\Omega \qquad , d\Omega=dx\cdot dy\cdot dz\cdot c\cdot dt \quad ,$$

при условии, что $\nu_{YX}=\nu_{XY}$, $\mu_{YX}=\mu_{XY}$ (это выполняется, если третий закон Ньютона для единой теории формулируется в редакции, изложенной в §7 части II).

$$F_{Yik}=\sum_L \lambda_{YL}\cdot\left(-\frac{\partial A_{Lk}}{\partial x^i}+\frac{\partial A_{Li}}{\partial x^k}\right)-$$

$$-\frac{1}{c}\cdot\left(-\frac{\partial A_{Yk}}{\partial x^i}+\frac{\partial A_{Yi}}{\partial x^k}\right)^*=\left(\overline{Y},-c\cdot\overline{\Phi}_Y\right) \quad .$$

$$(\xi)\cdot(\xi)=(\nu)^{-1}\ ,(\xi)=\sqrt{(\nu)^{-1}}\ ,(\chi)=\sqrt{(\nu)^{-1}}\cdot(\lambda)=(\xi)\cdot(\lambda),$$

$$(\mu)^T=(\mu)\ ,\ (\nu)^T=(\nu)\ ,a=\frac{1}{8}\quad ,\quad T_{Yik}=\sum_N \xi_{YN}\cdot F_{Nik}\,.$$

Таким образом, действие для полей вместе с находящимися в них зарядами имеет вид:

$$S=-\sum mc\cdot\int ds+$$

$$+\frac{1}{c}\cdot\sum_Y\int j_Y^i\cdot\left(\sum_L\lambda_{YL}\cdot A_{Li}\right)d\Omega-\sum_Y\int(\,\overline{j}_Y\cdot rot\int\overline{A}_Y dt\,)d\Omega+$$

$$+\sum_Y\int\left(\int\overline{A}_Y dt\cdot rot\,\overline{j}_Y\right)d\Omega+\frac{1}{8}\cdot\int\sum_Y T_{Yik}\cdot T_Y^{\ ik}d\Omega \quad .$$

§19 Уравнения Максвелла для электромагнитного поля, как приближенные уравнения единого поля.

I. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля:

$$div\overline{E} = \nu_{EE} \cdot \rho_E$$

$$div\overline{B} = 0$$

$$rot\,\overline{E} = \lambda_{EB} \cdot \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

$$rot\,\overline{B} = \mu_{BE} \cdot \overline{j}_E + \lambda_{BE} \cdot \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \quad .$$

$$\nu_{EE} = \frac{1}{\xi_0},\ \mu_{BE} = \mu_0\ ,\ \lambda_{EB} = -1\ ,\ \lambda_{BE} = \mu_0\ ,\ \mu_0 \cdot \xi_0 = \frac{1}{c^2}\ .$$

Уравнения единого поля:

$$div\overline{Y} = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L$$

$$rot\,\overline{Y} = \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{L}}{\partial t} \quad .$$

Сопутствующие им уравнения :

$$div\left(-\overline{\Phi}_Y\right) = -\sum_L \mu_{YL} \cdot \rho_L$$

$$rot\left(-\overline{\Phi}_Y\right) = \frac{1}{c^2} \cdot \sum_L \nu_{YL} \cdot \overline{j}_L + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \overline{Y}}{\partial t} \quad .$$

В состав единого поля входят n векторных полей. Число полей n неизвестно. Точно известно, что в состав единого поля входит электрическое поле $\overline{E}$.

В экспериментах проявляются поле $\overline{E}$ и электрическое магнитное поле $-\overline{\Phi}_E$.

$$-\overline{\Phi}_E = -\sum_L \lambda_{EL} \cdot \overline{L} \quad .$$

Предполагаем, что :

$$\left|\nu_{EE}\right| >> \left|\nu_{EL}\right| \quad \text{для} \quad L \neq E \text{ и не сильно больших } \rho_L \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_L \nu_{EL} \cdot \rho_L \approx \nu_{EE} \cdot \rho_E \quad .$$

$$\left|\mu_{EL}\right| << 1 \quad \text{для} \quad L \neq E \text{ и не сильно больших } \rho_L \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sum_L \mu_{EL} \cdot \rho_L \approx 0 \quad .$$

Тогда для электрического поля $\overline{E}$ и электрического магнитного поля $-\overline{\Phi}_E$:

$$div\overline{E} \approx \nu_{EE} \cdot \rho_E$$

$$rot\,\overline{E} \approx -\frac{\partial\left(-\overline{\Phi}_E\right)}{\partial t}$$

$$div\left(-\overline{\Phi}_E\right) \approx 0$$

$$rot\left(-\overline{\Phi}_E\right) \approx \frac{1}{c^2} \cdot \nu_{EE} \cdot \overline{j}_E + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \quad .$$

Предполагаем, что существует некое поле $\overline{B}$, которое вносит определяющий вклад в электрическое магнитное поле $-\overline{\Phi}_E$.

$$\left|\lambda_{EL}\right| << 1 \quad \text{для} \quad L \neq B \text{ и не сильно больших } \left|\overline{L}\right| \quad :$$

$$\overline{\Phi}_E = \sum_L \lambda_{EL} \cdot \overline{L} \approx \lambda_{EB} \cdot \overline{B}$$

$$\mu_{BE} \cdot \frac{1}{\nu_{EE}} \approx \frac{1}{c^2} \qquad \Rightarrow \qquad \mu_{BE} \approx \frac{1}{c^2} \cdot \nu_{EE} \quad .$$

Тогда только в этом случае можно приближенно отождествлять электрическое магнитное поле $-\overline{\Phi}_E$ с конкретным полем $\overline{B}$.

$$div\,\overline{E} \approx \nu_{EE} \cdot \rho_E$$

$$rot\,\overline{E} \approx -\frac{\partial\left(-\overline{\Phi}_E\right)}{\partial t} \approx -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

$$div\left(-\overline{B}\right) \approx div\left(-\overline{\Phi}_E\right) \approx 0$$

$$rot\left(-\overline{B}\right) \approx rot\left(-\overline{\Phi}_E\right) \approx \frac{1}{c^2} \cdot \nu_{EE} \cdot \overline{j}_E + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \approx$$

$$\approx \mu_{BE} \cdot \overline{j}_E + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \quad .$$

Таким образом, уравнения Максвелла для электромагнитного поля выполняются приближенно и являются частным случаем уравнений единой теории векторных полей.

II.

Частица с набором зарядов $\{q\}$ создает одно из полей $\overline{Y}$.

Такое поле $\overline{Y}$ создает и монополь, имеющий только один

заряд $Q_Y = \dfrac{\sum\limits_L \nu_{YL} \cdot q_L}{\nu_{YY}}$.

Уравнения единого поля и сопутствующие им уравнения:

$$div\overline{Y} = \sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L$$

$$rot\,\overline{Y} = \sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L + \sum_L \lambda_{YL} \cdot \frac{\partial \overline{L}}{\partial t}$$

$$div\left(-\overline{\Phi}_Y\right) = -\sum_L \mu_{YL} \cdot \rho_L$$

$$rot\left(-\overline{\Phi}_Y\right) = \frac{1}{c^2} \cdot \sum_L \nu_{YL} \cdot \overline{j}_L + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \overline{Y}}{\partial t} \quad ,$$

где $\overline{\Phi}_Y = \sum\limits_L \lambda_{YL} \cdot \overline{L}$.

Введем обозначения:

$$\nu_Y \equiv \nu_{YY}\ , \qquad \mu_Y \equiv \frac{\nu_Y}{c^2}\ ,$$

$$R_Y = \frac{\sum_L \nu_{YL} \cdot \rho_L}{\nu_Y}\ ,\ R_{-\Phi_Y} = \frac{-\sum_L \mu_{YL} \cdot \rho_L}{\mu_Y}\ ,$$

$$\overline{J}_Y = \frac{\sum_L \nu_{YL} \cdot \overline{j}_L}{\nu_Y}\ ,\ \overline{J}_{-\Phi_Y} = \frac{-\sum_L \mu_{YL} \cdot \overline{j}_L}{\mu_Y}\ .$$

Тогда уравнения единого поля примут вид:

$$div\overline{Y} = \nu_Y \cdot R_Y$$

$$rot\,\overline{Y} = -\mu_Y \cdot \overline{J}_{-\Phi_Y} - \frac{\partial\left(-\overline{\Phi}_Y\right)}{\partial t} = -\frac{\nu_Y}{c^2} \cdot \overline{J}_{-\Phi_Y} - \frac{\partial\left(-\overline{\Phi}_Y\right)}{\partial t}$$

$$div\left(-\overline{\Phi}_Y\right) = \mu_Y \cdot R_{-\Phi_Y}$$

$$rot\left(-\overline{\Phi}_Y\right) = \frac{1}{c^2} \cdot \nu_Y \cdot \overline{J}_Y + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial\overline{Y}}{\partial t} = \mu_Y \cdot \overline{J}_Y + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial\overline{Y}}{\partial t}\ .$$

Из всех уравнений выпишем уравнения, содержащие в себе напряженность электрического поля $\overline{E}$ и напряженность электрического магнитного поля $\overline{H} = -\overline{\Phi}_E$.

$$div\overline{E} = \nu_E \cdot R_E$$

$$rot\,\overline{E} = -\frac{\nu_E}{c^2} \cdot \overline{J}_{-\Phi_E} - \frac{\partial\left(-\overline{\Phi}_E\right)}{\partial t}$$

$$div\left(-\overline{\Phi}_E\right) = \mu_E \cdot R_{-\Phi_E}$$

$$rot\left(-\overline{\Phi}_E\right) = \mu_E \cdot \overline{J}_E + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial\overline{Y}}{\partial t}\ .$$

По форме эти уравнения напоминают уравнения Дирака.
Здесь:

$$R_{-\Phi_E} = \frac{-\sum_L \mu_{EL} \cdot \rho_L}{\mu_E}\ , \qquad \overline{J}_{-\Phi_E} = \frac{-\sum_L \mu_{EL} \cdot \overline{j}_L}{\mu_E}\ .$$

Если рассмотреть частный случай, когда исследуются только такие элементарные частицы, которые имеют набор зарядов $\{q\}$: $\sum_L \mu_{EL} \cdot q_L = 0$, то

$$R_{-\Phi_E} = 0\ , \qquad \overline{J}_{-\Phi_E} = \overline{0}$$

и уравнения электромагнитного поля примут вид уравнений Максвелла

$$div\overline{E} = \nu_E \cdot R_E$$

$$rot\,\overline{E} = -\frac{\partial\left(-\overline{\Phi}_E\right)}{\partial t}$$

$$div\left(-\overline{\Phi}_E\right) = 0$$

$$rot\left(-\overline{\Phi}_E\right) = \mu_E \cdot \overline{J}_E + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \quad .$$

Таким образом, уравнения Максвелла для электромагнитного поля при определенных условиях (исследовании частиц с набором зарядов $\{q\}$: $\sum_L \mu_{EL} \cdot q_L = 0$) являются частным случаем уравнений единой теории.

§20 Способ проверки теории.

В §12 части II рассчитаны поля, создаваемые вращающимся шаром:

$$\overline{Y} = \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L}{4\pi} \cdot \frac{\overline{r}}{r^3} + \sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot q_L \cdot R^2}{20\pi} \cdot rot\frac{\overline{\omega} \times \overline{r}}{r^3}\ ,$$

$$-\Phi_Y = -\sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot q_L}{4\pi} \cdot \frac{\overline{r}}{r^3} + \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L \cdot R^2}{20\pi \cdot c^2} \cdot rot\frac{\overline{\omega} \times \overline{r}}{r^3} \quad .$$

При вращении планеты массы М, создаются электрическое $\overline{E}$ и электрическое магнитное поле $-\overline{\Phi}_E$, которые приведены в §10 части I . Разность напряженностей полей на северном и южном географических полюсах:

$$\Delta E = \left| \frac{1}{4\cdot\pi} \cdot \nu_{EF} \cdot M \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{\mu_{EF} \cdot M}{10\cdot\pi} \cdot \frac{\omega}{R} \right| -$$

$$- \left| \frac{-1}{4\cdot\pi} \cdot \nu_{EF} \cdot M \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{\mu_{EF} \cdot M}{10\cdot\pi} \cdot \frac{\omega}{R} \right|,$$

$$\Delta\left| -\overline{\Phi}_E \right| = \left| \frac{-1}{4\cdot\pi} \cdot \mu_{EF} \cdot M \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{\nu_{EF} \cdot M}{10\cdot\pi\cdot c^2} \cdot \frac{\omega}{R} \right| -$$

$$- \left| \frac{1}{4\cdot\pi} \cdot \mu_{EF} \cdot M \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{\nu_{EF} \cdot M}{10\cdot\pi\cdot c^2} \cdot \frac{\omega}{R} \right|.$$

Напряженности электрических и электрических магнитных полей на географических полюсах планет могут быть обусловлены разными причинами. Например, вклад в напряженность электрического магнитного поля вносит солнечный ветер, магнитное динамо и др. Но ожидается, что ΔE и $\Delta\left|-\overline{\Phi}_E\right|$ обусловлены только лишь вращением планеты. Поэтому следует сравнить расчетные значения ΔE и $\Delta\left|-\overline{\Phi}_E\right|$ с полученными в результате измерения. Предварительно конечно следует определить ν_{EF} и μ_{EF}, зная, ΔE и $\Delta\left|-\overline{\Phi}_E\right|$ для одной планеты. После этого можно рассчитать ΔE и $\Delta\left|-\overline{\Phi}_E\right|$ для остальных планет солнечной системы и сравнить рассчитанные значения с результатами измерения для этих планет.

§ 21 Вклад в смещение перигелия планеты, обусловленный вращением Солнца.

Поля, создаваемые вращающимся шаром (см. часть II §12):

$$\overline{Y} = \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L}{4\pi} \cdot \frac{\overline{r}}{r^3} + \sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot q_L \cdot R^2}{20\pi} \cdot rot \frac{\overline{\omega} \times \overline{r}}{r^3},$$

$$-\varPhi_Y = -\sum_L \frac{\mu_{YL} \cdot q_L}{4\pi} \cdot \frac{\overline{r}}{r^3} + \sum_L \frac{\nu_{YL} \cdot q_L \cdot R^2}{20\pi \cdot c^2} \cdot rot \frac{\overline{\omega} \times \overline{r}}{r^3}.$$

Рассмотрим вопрос о влиянии вращения Солнца на движение планет. Будем считать, что Солнце и планеты имеют только гравитационные заряды, и $\mu_{FF} = 0$. В этом случае напряженности полей, создаваемые Солнцем:

$$\overline{F} = \frac{\nu_{FF} \cdot M}{4\pi} \cdot \frac{\overline{r}}{r^3} \quad , \quad -\varPhi_F = \frac{\nu_{FF} \cdot M \cdot R^2}{20\pi \cdot c^2} \cdot rot \frac{\overline{\omega} \times \overline{r}}{r^3}.$$

Со стороны вращающегося Солнца на планету действует сила:

$$\overline{f} = q_F \cdot \left(\overline{F} + \overline{\mathrm{v}} \times \left(-\overline{\varPhi}_F\right)\right) =$$

$$\frac{-G \cdot m \cdot M}{4\pi} \cdot \frac{\overline{r}}{r^3} - \frac{G \cdot m \cdot M \cdot R^2}{20\pi \cdot c^2} \cdot \left[\overline{\mathrm{v}} \times rot \frac{\overline{\omega} \times \overline{r}}{r^3}\right] =$$

$$= A \cdot \frac{\overline{r}}{r^3} - B \cdot \left[\overline{\mathrm{v}} \times rot \frac{\overline{\omega} \times \overline{r}}{r^3}\right] = \overline{f}_1 + \overline{f}_2.$$

Здесь: M – масса, R - радиус, ω – угловая скорость Солнца, m – масса планеты, $\nu_{FF} = -G = -6.67 \cdot 10^{-11} \dfrac{н \cdot м^2}{кг^2}$ (G - гравитационная постоянная),

В сферической системе координат:

$$x = r \cdot sin\nu \cdot cos\varphi \ , \ y = r \cdot sin\nu \cdot cos\varphi \ , \ z = r \cdot cos\nu \ ,$$

скорость планеты:

$$\overline{\mathrm{v}} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot \overline{e}_r + r \cdot sin\nu \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \overline{e}_\varphi + r \cdot \frac{d\nu}{dt} \cdot \overline{e}_\nu =$$

$$= \dot{r} \cdot \overline{e}_r + r \cdot sin\nu \cdot \dot{\varphi} \cdot \overline{e}_\varphi + r \cdot \dot{\nu} \cdot \overline{e}_\nu = \left\{\dot{r},\ r \cdot sin\nu \cdot \dot{\varphi},\ r \cdot \dot{\nu}\right\}.$$

Момент импульса планеты

$$\overline{N} = m \cdot \left[\overline{r} \times \overline{\mathrm{v}}\right] = \begin{vmatrix} \overline{e}_r & \overline{e}_\nu & \overline{e}_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r \cdot \dot{\nu} & r \cdot sin\nu \cdot \dot{\varphi} \end{vmatrix} =$$

$$= m \cdot r^2 \left(\dot{\nu} \cdot \bar{e}_\varphi - \sin\nu \cdot \dot{\varphi} \cdot \bar{e}_\nu\right).$$

$$N^2 = m^2 \cdot r^4 \cdot \left(\dot{\nu}^2 + \sin^2\nu \cdot \dot{\varphi}^2\right) = m^2 \cdot r^4 \cdot \dot{\theta}^2.$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\dot{\nu}^2 + \sin^2\nu \cdot \dot{\varphi}^2} = \frac{N}{m \cdot r^2}.$$

$$\frac{d\overline{N}}{dt} = \left[\bar{r} \times \bar{f}\right] = \left[\bar{r} \times \left(A \cdot \frac{\bar{r}}{r^3} - B \cdot \left[\bar{\mathrm{v}} \times rot\frac{\overline{\omega} \times \bar{r}}{r^3}\right]\right)\right] =$$

$$= -B \cdot \bar{r} \times \left[\bar{\mathrm{v}} \times rot\frac{\overline{\omega} \times \bar{r}}{r^3}\right] \neq \bar{0}.$$

Запишем закон сохранения энергии, учитывая, что магнитное гравитационное поле $-\overline{\Phi}_F$ работы не совершает:

$$E = \frac{m \cdot \mathrm{v}^2}{2} + U(r) = \frac{m \cdot \mathrm{v}^2}{2} - \frac{G \cdot m \cdot M}{r} = const$$

Так как $\bar{\mathrm{v}} = \dot{r} \cdot \bar{e}_r + r \cdot \sin\nu \cdot \dot{\varphi} \cdot \bar{e}_\varphi + r \cdot \dot{\nu} \cdot \bar{e}_\nu$, то

$$\mathrm{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \cdot \sin^2\nu \cdot \dot{\varphi}^2 + r^2 \cdot \dot{\nu}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \cdot \left(\sin^2\nu \cdot \dot{\varphi}^2 + \dot{\nu}^2\right) =$$

$$= \dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2 .$$

$$E = \frac{m \cdot \mathrm{v}^2}{2} + U(r) = \frac{m \cdot \left(\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2\right)}{2} - \frac{G \cdot m \cdot M}{r} = const .$$

$$\frac{m}{2} \cdot \left(\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2\right) - G \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{r} = E .$$

Представим $r(t) = r[\theta(t)]$ и учтем, что $\dot{\theta} = \dfrac{N}{m \cdot r^2}$,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{N^2}{m^2 \cdot r^4}.$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{N}{mr^2} = \frac{N}{m \cdot r^2} \cdot \frac{dr}{d\theta} .$$

$$\frac{m}{2} \cdot \left\{ \frac{N^2}{m^2 \cdot r^4} \cdot \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{N^2}{m^2 \cdot r^4} \cdot r^2 \right\} - G \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{r} = E .$$

$$\frac{N^2}{r^4}\cdot\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{N^2}{r^2}-2G\cdot m^2\cdot M\cdot\frac{1}{r}=2\cdot m\cdot E\ .$$

$$\frac{N}{r^2}\cdot\left(\frac{dr}{d\theta}\right)=\sqrt{2\cdot m\cdot E-\frac{N^2}{r^2}+\frac{2G\cdot m^2\cdot M}{r}}\ .$$

Разделяя переменные, получим:

$$\theta=\int d\theta=\int\frac{\frac{N}{r^2}\cdot dr}{\sqrt{2\cdot E\cdot m-\frac{N^2}{r^2}+\frac{2\cdot G\cdot m^2\cdot M}{r}}}\ .$$

Смещение перигелия за один оборот обращения планеты вокруг Солнца:

$$\Delta\theta=2\cdot\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{\frac{N(r)}{r^2}\cdot dr}{\sqrt{2\cdot E\cdot m-\frac{N^2(r)}{r^2}+\frac{2\cdot G\cdot m^2\cdot M}{r}}}\ .$$

Известно, что плоскости орбит планет Солнечной системы близки к плоскости земной орбиты. Известно, что Солнце вращается, и ось вращения Солнца образует угол $82^0 45'$ с плоскостью орбиты Земли. Чтобы планеты двигались в одной плоскости, следует предположить, что планеты и Солнце обладают только гравитационными зарядами, $\mu_{FF}=0$ и ось вращения Солнца перпендикулярна плоскости орбиты планет. Последнее условие, существенно упрощающее задачу, выполняется приближенно. Учитывая, что в этом случае

$$rot\frac{\overline{\omega}\times\overline{r}}{r^3}=\frac{2\cdot\overline{\omega}}{r^3}-\frac{3\cdot\overline{r}\times\left[\overline{\omega}\times\overline{r}\right]}{r^5}=-\frac{\overline{\omega}}{r^3}$$

и $\nu_{FF}=-G$, получим:

$$\overline{F}=\frac{-G\cdot M}{4\pi}\cdot\frac{\overline{r}}{r^3}\quad ,-\Phi_F=\frac{G\cdot M\cdot R^2}{20\pi\cdot c^2}\cdot\frac{\overline{\omega}}{r^3}\quad .$$

В декартовой системе координат $\overline{\omega}=\{0,0,\omega\}$. $\overline{\mathrm{v}}=\{\mathrm{v}_x,\mathrm{v}_y,0\}$.

В сферической системе координат:

$$\overline{\omega} = \{\omega \cdot cos\nu,\ 0,\ -\omega \cdot sin\nu\},\ \ \overline{\mathrm{v}} = \{\dot{r},\ r \cdot sin\nu \cdot \dot{\varphi},\ r \cdot \dot{\nu}\}.$$

$$\left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\omega}\right] = \begin{vmatrix} \overline{e}_r & \overline{e}_\nu & \overline{e}_\varphi \\ \dot{r} & r \cdot \dot{\nu} & r \cdot sin\nu \cdot \dot{\varphi} \\ \omega \cdot cos\nu & -\omega \cdot sin\nu & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \omega \cdot r \cdot \dot{\varphi} \cdot sin^2\nu \cdot \overline{e}_r -$$

$$-\left(\dot{r} \cdot \omega \cdot sin\nu + r \cdot \omega \cdot \dot{\nu} \cdot cos\nu\right) \cdot \overline{e}_\varphi + r \cdot \omega \cdot \dot{\varphi} \cdot sin\nu \cdot cos\nu \cdot \overline{e}_\nu .$$

Учитывая, что $\nu = \dfrac{\pi}{2}$ получим

$$\left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\omega}\right] = \omega \cdot r \cdot \dot{\varphi} \cdot \overline{e}_r - \dot{r} \cdot \omega \cdot \overline{e}_\varphi .$$

Тогда $$\left[\overline{\mathrm{r}} \times \left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\omega}\right]\right] = \begin{vmatrix} \overline{e}_r & \overline{e}_\nu & \overline{e}_\varphi \\ r & 0 & 0 \\ \omega \cdot r \cdot \dot{\varphi} & 0 & -\dot{r} \cdot \omega \end{vmatrix} = r \cdot \dot{r} \cdot \omega \cdot \overline{e}_\nu .$$

Сила, действующая на планету со стороны вращающегося Солнца, равна:

$$\overline{f} = q_F \cdot \left(\overline{F} + \overline{\mathrm{v}} \times \left(-\overline{\Phi}_F\right)\right) = \frac{-G \cdot m \cdot M}{4\pi} \cdot \frac{\overline{r}}{r^3} +$$

$$+ \frac{G \cdot m \cdot M \cdot R^2}{20\pi \cdot c^2} \cdot \frac{\left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\omega}\right]}{r^3} = A \cdot \frac{\overline{r}}{r^3} + B \cdot \frac{\left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\omega}\right]}{r^3} = \overline{f}_1 + \overline{f}_2 .$$

$\overline{N} = \overline{N}_1 + \overline{N}_2$ – полный момент импульса, направленный перпендикулярно плоскости движения планеты.

$$\frac{d\overline{N}}{dt} = \left[\overline{r} \times \overline{f}\right] = \left[\overline{r} \times \left(\overline{f}_1 + \overline{f}_2\right)\right] = \left[\overline{r} \times \overline{f}_1\right] + \left[\overline{r} \times \overline{f}_2\right] =$$

$$= \left[\overline{r} \times \left(A \cdot \frac{\overline{r}}{r^3}\right)\right] + \left[\overline{r} \times \left(B \cdot \frac{\left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\omega}\right]}{r^3}\right)\right] = \overline{0} + \frac{B}{r^3} \cdot \left[\overline{r} \times \left[\overline{\mathrm{v}} \times \overline{\omega}\right]\right] =$$

$$= \frac{B}{r^3} \cdot r \cdot \dot{r} \cdot \omega \cdot \bar{e}_\nu = B \cdot \omega \cdot \frac{\dot{r}}{r^2} \cdot \bar{e}_\nu = / \nu = \frac{\pi}{2} / = \left(-B \cdot \omega \cdot \frac{1}{r} \cdot \bar{e}_\nu \right)' .$$

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \left(-B \cdot \omega \cdot \frac{\bar{e}_\nu}{r} \right)' \Rightarrow \bar{N} = \left(-B \cdot \omega \cdot \frac{\bar{e}_\nu}{r} \right) + \bar{N}_1 = \bar{N}_2 + \bar{N}_1 .$$

$$\bar{N}_2 = -B \cdot \omega \cdot \frac{\bar{e}_\nu}{r} \quad \Rightarrow \quad \bar{N}_1 \uparrow\uparrow \bar{N}_2 \quad \text{так как } \nu = \frac{\pi}{2} .$$

$$N = N(r) = N_1 + \frac{B \cdot \omega}{r} = N_1 + \frac{G \cdot m \cdot M \cdot R^2 \cdot \omega}{20\pi \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r} .$$

Учитывая, что при $\nu = \frac{\pi}{2}$ имеет место $\theta = \varphi$, получим

смещение перигелия за один оборот обращения планеты вокруг Солнца:

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{N(r)}{r^2} \cdot dr}{\sqrt{2 \cdot E \cdot m - \frac{N^2(r)}{r^2} + \frac{2 \cdot G \cdot m^2 \cdot M}{r}}} .$$

Постоянные N_1 , E можно выразить через известные большую полуось a и эксцентриситет e орбиты планеты:

$$\alpha = G \cdot M \cdot m, \quad E = -|E| = -\frac{\alpha}{2 \cdot a}, \quad N_1 = \sqrt{\alpha \cdot m \cdot a \cdot (1 - e^2)} .$$

Таким образом, существует возможность вычислить вклад в смещение перигелия планет $\Delta\varphi$, который обусловлен вращением Солнца

Вектор момента импульса планеты относительно Солнца не является постоянным вектором, т. к.

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \frac{d\bar{N}_1}{dt} + \frac{d\bar{N}_2}{dt} = \frac{d\bar{N}_2}{dt} \neq 0 .$$

Будем рассматривать движение планеты, не учитывая вращения Солнца, как невозмущенное. Составляющая вектора момента импульса $\overline{N}_1$ при этом сохраняется. Влияние на движение планеты, обусловленное вращением Солнца, будем рассматривать как возмущение. Составляющая вектора момента импульса $\Delta\overline{N} = \overline{N}_2$, соответствующая возмущению, при этом не сохраняется.

$$\overline{N} = m \cdot \left[\overline{r} \times \overline{\mathrm{v}}\right] = m \cdot \left[\overline{r} \times \left(\overline{\mathrm{v}}_1 + \Delta\overline{\mathrm{v}}\right)\right] =$$
$$= m \cdot \left[\overline{r} \times \overline{\mathrm{v}}_1\right] + m \cdot \left[\overline{r} \times \Delta\overline{\mathrm{v}}\right] = \overline{N}_1 + \Delta\overline{N}$$

Свяжем изменение скорости $\Delta\overline{\mathrm{v}}$, соответствующее возмущению, с вращением орбиты планеты как целого с угловой скоростью $\omega_П$.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = (\varphi + \Delta\varphi)' = \frac{N}{m \cdot r^2} = \frac{N_1 + \Delta N}{m \cdot r^2},$$
$$\omega_П = (\Delta\varphi)' = \frac{\Delta N}{m \cdot r^2} = \frac{G \cdot M \cdot R^2 \cdot \omega}{20\pi \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r^3},$$

так как

$$\Delta N = N_2(r) = \frac{B \cdot \omega}{r} = \frac{+G \cdot m \cdot M \cdot R^2 \cdot \omega}{20\pi \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r}.$$

Знак “ + “ показывает, что орбита планеты как целое вращается в направлении движения планеты.

Среднее значение угловой скорости вращения орбиты

$$\omega_{П\,ср.} = \frac{1}{r_{max} - r_{min}} \cdot \int_{r_{min}}^{r_{max}} \omega_П dr = \frac{1}{r_{max} - r_{min}} \cdot \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{G \cdot M \cdot R^2 \cdot \omega}{20\pi \cdot c^2 \cdot r^3} dr.$$

$$\omega_{П\,ср.} = \frac{G \cdot M \cdot R^2 \cdot \omega}{10\pi \cdot c^2} \cdot \frac{r_{max} + r_{min}}{(r_{max} \cdot r_{min})^2}.$$

Для планеты Меркурий:

расстояние от планеты до Солнца:

в афелии $r_{max} = 70 \cdot 10^9$ *м.*,

в перигелии $r_{min} = 46 \cdot 10^9$ *м.*,

масса Солнца $M = 1.984 \cdot 10^{30}$ *кг.*, радиус Солнца $R = 6.96 \cdot 10^{9}$ $м.$,

период вращения Солнца $T = 25 дн. 9.1 час.$ и $\omega = \dfrac{1}{T}$,

скорость света $c = 2.979 \cdot 10^{8}$ $м.$.

$\omega_{П\, ср.} \approx 1.173 \cdot 10^{-17}$ $рад / сек. \approx 2''.4 \cdot 10^{-12}$ $1/ сек. \approx$

$\approx$ / в столетии $\pi \cdot 10^{9}$ **с**ек./ $\approx 7''.5 \cdot 10^{-3}$ $1/$ *столетие*.

Таким образом, вращение Солнца оказывает на движение планеты Меркурий очень маленькое влияние.

§ 22 Ссылка на А. Эйнштейна.

В §10 части 1 приведен пример единой теории векторных полей - единая теория гравитации и электричества. Из нее следует, что любой гравитационный заряд порождает электрическое поле и электрическое магнитное поле. Выглядит это очень непривычно в виду отсутствия экспериментальных данных, что можно объяснить малыми значениями констант ν_{EF} и μ_{EF}. С тем, чтобы снять предубеждение против предлагаемой теории, сошлемся на А. Эйнштейна, приведя выдержку из его статьи [6, стр.159] :

“Земля и Солнце обладают магнитными полями, ориентации и полярности которых приближенно определяются направлением вращения этих небесных тел. Согласно теории Максвелла, эти поля могли бы возникнуть благодаря электрическим токам, текущим вокруг осей вращения небесных тел противоположно вращению. Солнечные пятна, которые с хорошим приближением можно считать вихрями, также обладают аналогичными очень сильными полями. Однако едва ли можно думать, что во всех этих случаях действительно существуют электрические токи проводимости или конвекционные токи достаточной силы.

Скорее похоже на то, как будто магнитные поля возникают при вращательном движении нейтральных масс. Подобное порождение полей не могут предсказать ни теория Максвелла в ее первоначальном виде, ни теория Максвелла, обобщенная в смысле общей теории относительности. Здесь природа указывает нам, по-видимому, фундаментальную, пока еще не объясненную теорией закономерность ?.

……………………………

? В соответствии с электродинамической аналогией напрашивается соотношение вида $d\overline{B} = -Cdm\frac{[v\overline{r}]}{r^3}$, ***причем*** dm ***означает массу, движущуюся со скоростью*** $\overline{v}$, r ***или*** $r = |\overline{r}|$ ***- расстояние начала координат от этой точки. (Формула во всяком случае может рассматриваться, хотя бы для вращательных движений, в качестве первого приближения.) Связь между полями Солнца и Земли получается отсюда правильной по порядку величины. Постоянная*** C ***имеет размерность***

(Гравитационная постоянная)$^{1/2}$***/ (Скорость света) .***
Отсюда можно предположительно определить порядок величины постоянной C. ***Подставляя это численное значение в написанную выше формулу, мы получаем – в применении к вращающейся Земле – правильный порядок величины для магнитного поля Земли. Эта связь заслуживает рассмотрения, хотя и может основываться на случайности. “***

Таким образом, теория, изложенная в этой книге, вполне могла быть разработана и сто лет тому назад. Остается надеяться, что теория привлечет внимание экспериментаторов, несмотря на предполагаемые количественно малые значения констант связи полей друг с другом.

Литература.

[1] Л.Д. Ландау ,Е.М. Лившиц “Теория поля “,М.,“Наука”, 1973
[2] Л. Бриллюэн “Новый взгляд на теорию относительности “, М., “Мир”, 1972
[3] В.И. Стражев , Л.М. Томильчик “Электродинамика с маг нитным зарядом”, Минск, “Наука и техника”, 1975
[4] Л.Д. Ландау , Е.М. Лившиц “Механика “, М., “Наука”, 1973
[5] А.Н. Матвеев “Механика и теория относительности “ М.,”Высшая школа”, 1976, §31.
[6] А. Эйнштейн “Об эфире.”– в кн.: А. Эйнштейн собр. науч. трудов. М., “Наука”, 1966, т. 2, с. 154 – 160.
[7] Фейнман, Лейтон, Сендс “Фейнмановские лекции по физике Задачи и упражнения с ответами и решениями”, М., Мир, 1969, с. 339-440

Оглавление.

Часть II   Подробный вывод некоторых результатов.

Россия, Краснодарский край, г. Армавир,   1999г. – 2005г.

Об авторе.

Науменко Юрий Викторович
родился 18 мая 1955г. в г. Тихорецке Краснодарского края. В 1977г. закончил физико-математический факультет Армавирского педагогического института.

Работал на предприятиях и учреждениях г.Армавира : АГПИ (педагогический институт), КНИИТИМ(НИИ тракторов и механизации), электротехнический завод, завод тяжелого весостроенния, машиностроительный техникум, Армавирское авиационное училище летчиков, энергосбыт(АМОЭ).

Эта работа посвящается родителям автора

Науменко Валентине Сергеевне и

Науменко Виктору Ивановичу.

Книга размещена па сайте www.etvp.narod.ru

e-mail автора: naumenko_ju@mail.ru

Адрес: 352913 Краснодарский край, г. Армавир ,

ул. Азовская 9 кв. 45

Науменко Ю.В.

Науменко Юрий Викторович

Единая теория векторных полей

Подписано в печать 15.05.2006 г. Формат бумаги 60х84/16 Бумага офсетная. Печать офсетная. Условных п.л. 8,75. Уч. изд. 9,0. Заказ 716у.
Тираж 100.
Открытое Акционерное общество “Армавирское полиграфпредприятие”.
352900, Россия, г. Армавир, ул. Комсомольская, 123.

Министерство культуры и массовых коммуникаций
Российской Федерации

Федеральное агентство по печати и массовым коммуникациям
РОССИЙСКАЯ ордена "Знак Почета" КНИЖНАЯ ПАЛАТА

119019, Москва, Кремлевская наб., 1/9
тел. (095) 203-56-08
факс: (095) 298-25-90
http://www.bookchamber.ru
mailto: info@bookchamber.ru

от 04.12.06 № 463/6

Науменко Юрию Викторовичу

По Вашему запросу (от 11 ноября 2006 г.) о поступлении в Российскую книжную палату Вашей книги "Единая теория векторных полей" сообщаю, что данное издание поступило в Российскую книжную палату и зарегистрировано за номером - 06-50077.

Науменко, Юрий Викторович.

Единая теория векторных полей : кн. Для чтения, предназначенная лицам, интересующимся проблемой единой теории поля / Науменко Ю. В. - Армавир, печ. 2006. - 136 с. : ил.; 20 см. – Формат бумаги 60x84/16. – Заказ 716у.
Библиогр.: с. 135.
ISBN 5-93750-147-0, 100 экз.
Подписана "В печать" - 15.05.2006
Поступила в Российскую книжную палату в количестве 16 экз. - 24.08.2006
Зарегистрирована в Российской книжной палате за номером - [06-50077]

- - 1. Квантовая теория полей.
УДК 530.14
ББК 22.31

Генеральный директор
В. А. Сироженко

Подготовлено
01.12.2006
И. И. Ильина
688 52 63